2.1 Thèses de Church, Post, Turing

2.1.1 Introduction

La thèse de Church permet de modéliser d'abord, et identifier ensuite avec le mécanisme, des questions de philosophie mécaniste de l'esprit avec des questions d'informatique théorique ou de théorie de la calculabilité, appelée aussi théorie de la récursion. Dans le diagramme méthodologique, la thèse de Church est de type $\begin{smallmatrix} \mathrm{mec} \\ \downarrow \\ \mathrm{rec} \end{smallmatrix}$ et plus généralement de type $\begin{smallmatrix} \mathrm{philo} \\ \downarrow \\ \mathrm{math} \end{smallmatrix}$ puisqu'elle associe un concept intuitif, non mathématique, philosophique, à une notion mathématique. Les motivations pour la thèse de Church motiveront la définition générale, que je donnerai en 2.2, de la notion de *capacité personnelle* pour quelques entités mécanistes. Celle-ci sera utilisée pour résoudre les problèmes biologiques de Descartes et de Driesch d'une part, et permettra d'autre part d'éclairer les questions concernant l'identité personnelle -psychologique[1]- en philosophie mécaniste et digitale de l'esprit (MEC-DIG-DEI). La thèse de Church va permettre l'élaboration d'une endomathématique, c'est-à-dire une mathématique dans laquelle le mathématicien est plongé lui-même comme objet[2]. Je vais isoler une philosophie naturelle des machines, comme étant produite par les machines elles-mêmes à la limite. Cela va revenir à étudier des classes de propositions vraies assertables par les machines (suite et collection de suites de machines)

---

[1] Qui correspond à la continuité psychologique de Parfit (voir 1.3), on verra comment une telle identité peut se "construire".

[2] C'est dans la troisième partie que je motive et réalise le passage de la représentation ou *modélisation* du mathématicien par un objet mathématique à son *identification* avec un objet mathématique, mais, avec MDI, on sait déjà que cela se passe à chaque translation AR.

concernant leurs propres capacités communicatives. Je vais argumenter qu'une théorie de la connaissance peut être extraite de cette approche qui donne un rôle prépondérant aux fondements des mathématiques aussi bien constructives, que classiques, épistémiques, etc.

2.1.2 Machines digitales, nombres et fonctions

L'âme est un nombre qui se meut lui-même a dit Xénocrate (Trouillard 1972). Cette idée Pythagoricienne a été reprise par divers Platoniciens, et a eu une certaine influence chez les néoplatonistes, notamment, par exemple pour les écoles Islamiques au 10$^{\text{ème}}$ siècle (Netton 1982). Cette idée admet une interprétation concrète avec le mécanisme digital fort. Imaginons un programme "intelligent", capable de gérer son propre backup sur le matériel (hardware), et ayant pour "espace vital" un réseau d'ordinateurs et quelques robots (ceux-là même qui lui permettent de s'occuper de ses incarnations matérielles. Vu qu'il est conscient (par MEC-DIG-FORT), il y a un sens ou il peut s'attribuer une nature numérique, et en tenir compte pour ses actions ultérieurs. Il peut se dupliquer, il peut savoir qu'il peut se dupliquer, savoir qu'il peut se déplacer à la vitesse de la lumière entre les ordinateurs de son réseau, etc. De même, MEC-DIG-IND peut s'énoncer sous la forme

je suis un nombre naturel

admettant une interprétation similaire. Toute-fois, si ce nombre naturel veut pouvoir se souvenir de ses pérégrinations, il doit conserver l'empreinte de ses actions, décisions et d'une façon générale de son évolution. Dès lors il vaut mieux parler de suite de nombres ou de *nombres variables*. De plus, cette suite de nombres naturels ne représente qu'une suite d'encodages qui permettent la manifestation d'une entité plus abstraite, capturable par un nombre, certes, mais relativement à un niveau.

Quoi qu'il en soit, la philosophie mécaniste, par l'importance qu'elle attribue à la finitude (les choses et les êtres finis) et le finitaire (les discours et les théories finies) nécessite d'approfondir et de questionner les nombres naturels, et les fonctions définies sur l'ensemble des naturels. Je désignerai l'ensemble des nombres naturels aussi bien par N, que par ω,

$$\omega = N = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

La thèse de Church établit un lien entre les fonctions intuitivement (ou humainement, mécaniquement, ou absolument) calculables.

L'addition, la multiplication, l'exponentiation, la factorielle sont des exemples typiques de fonctions intuitivement calculables définies sur les nombres naturels. L'idée est qu'une fonction est intuitivement calculable si l'on peut décrire sans ambiguïté, en un nombre fini de mots, comment calculer cette fonction. On devrait peut-être dire fonction *communicablement* calculable.

La thèse de Church, correctement bien qu'*anachroniquement* présentée, est la thèse selon laquelle la collection des fonctions intuitivement calculables est identique à la collection des fonctions calculables par un **ordinateur**, étant entendu qu'il dispose d'une mémoire non-bornée. Du côté philosophique la thèse est extrêmement floue puisqu'on essaye de cerner les concept de

fonction calculable
fonction effectivement calculable
fonction humainement calculable
fonction mécaniquement calculable
fonction communicablement calculable
fonction absolument calculable

avec la notion de fonction calculable au moyen d'un ordinateur arbitraire, et aussi concret qu'on puisse le désirer, pour autant qu'on supplée lorqu'il rouspète pour avoir plus de mémoire (en disant "memory overflow" par exemple).

Selon l'analyse faite en 1.1 avec le petit ordinateur, on est assuré de l'existence des niveaux d'indépendance d'explication, c'est ce que j'espère parvenir à préciser davantage tout au long de cette partie.

Remarque. Il existe une variante importante de la thèse de Church, appelée thèse de Post Turing par Reinhardt 1985[3]. La collection des propositions intuitivement prouvables (de l'arithmétique) est identique à la collection des propositions prouvables par une machine universelle. (on y revient dans 2.3).

La thèse originale a été énoncée par Church en 1936. Alonzo Church écrit :

> *We now define the notion, already discussed, of an* effectively calculable *function of positive integers by identifying it with the notion of recursive function of positive integers (or of a λ-definable function of positive integers). This definition is thought to be justified by the considerations which follow, so far as positive justification can ever be obtained for a formal definition to correspond to an intuitive not*ion. (Emphase de Church)

[3] Reinhardt 1985 n'est pas très explicite sur le rôle de Post et Turing, il se contente de mentionner une conversation avec Oswaldo Chateaubriand.

Il s'agit en fait, pour Church, d'une définition. C'est Kleene qui va faire de cette définition une thèse de la philosophie des mathématiques. Turing, indépendamment de Church, proposera une thèse identique lorsqu'il introduira la notion de machine de Turing. Celle-ci était destinée à capturer le concept de fonction *humainement* calculable. C'est pourquoi on parle aussi de thèse de Church-Turing, ou même de thèse de Turing. La classe des fonctions λ-définissables, la classe des fonctions récursives et la classe des fonctions calculables par une machine de Turing sont identiques. Ces trois classes sont encore identiques avec la classe des fonctions programmables sur ordinateur. La philosophie mécaniste digitale, ou plus simplement le mécanisme digital, donne un rôle privilégié à cette classe de fonctions.

D'où vient l'importance de l'ordinateur et de la classe des fonctions que l'ordinateur est capable de calculer ? L'origine de cette classe de fonctions est indépendante de l'histoire de l'ordinateur *machine matérielle*. Le début de l'histoire des fonctions programmables est indépendante de l'histoire des machines réelles capables d'être programmées.

Pour bien saisir la thèse de Church, il est nécessaire de regarder comment la classe des fonctions programmables et la machine universelle ont été découvertes et cela de façon presque indépendante de la découverte (ou de l'invention) de l'ordinateur. La machine universelle admet une multiplicité d'histoires.

2.1.3 Beaucoup d'histoires pour une machine *universelle*

Si on demandait de raconter l'histoire de l'ordinateur, voilà en résumé différentes histoires que l'on pourrait entendre.

Une des histoires commence[4] en Angleterre avec Babbage, à travers la contemplation des étoiles. Réalisant la quantité astronomique de calculs nécessaires à l'observation attentive du ciel, et s'inspirant des premières machines automatiques programmables, comme les métiers à tisser d'Albert Jacquard en France, Babbage s'est mis à construire une première machine à calculer (*the difference engine*) puis en conçu une autre (*the analytical machine*) qu'il ne terminera que sur le papier et qui est reconnue comme étant pratiquement le premier ordinateur (Wilkes 1977, Turing "1992").

Cette machine est purement mécanique (je veux dire qu'elle ne fonctionne pas à l'électricité).

Je mentionne le destin difficile d'Ada Lovelace contemporaine et amie de Babbage dont elle a traduit des manuscrits, en y introduisant des innovations et des commentaires originaux, mais qui accumulera les difficultés qu'une femme pouvait rencontrer à cette époque (notamment)

4 Cette histoire est précédée naturellement d'une préhistoire. On peut consulter Ligonnière 1987.

(Hyman 1984, Stein 1985). Plusieurs faits laissent entendre que Babbage a réalisé le caractère *universel*[5] de sa machine ou en tout cas du ***système de notation fonctionnel*** décrivant le fonctionnement de sa machine. D'après Lafitte, Babbage aurait plus souffert de l'incompréhension de ses contemporains pour son système fonctionnel que de leur incompréhension pour la machine. (Lafitte 1932). Un exemplaire de la machine de Babbage se trouve à Londres.

C'est l'apparition de l'électricité et sutout la seconde guerre mondiale qui va faire prendre au sérieux ces nouvelles machines qui dès lors s'élèveront au dessus du stade de simple projet. C'est pendant la guerre, par exemple, pour décoder les codes secrets allemands, que, sous l'impulsion de Turing, se développent des embryons de machines universelles. L'histoire continue avec Von Neumann, Suze, aux Etats-Unis, accompagnée de révolutions techniques successives, etc. On peut trouver dans Ligonnière 1987 le récit compact mais assez détaillé de cette histoire. Remarquons l'usage de la mécanique quantique, non pas pour introduire des nouvelles fonctionnalités, mais pour miniaturiser d'avantage les graphes booléens[6]. Cela jusqu'aux réseaux d'ordinateurs personnels d'aujourd'hui.

Une *autre* histoire commence par la contemplation de l'infini. C'est l'histoire de la conception de l'infini par l'homme.

Elle remonte sans doute au respect de l'ancêtre et de la mémoire, au premier culte funéraire, à la compréhension, finalement toujours progressive, de la finitude et de sa ou ses négations.

Cette histoire s'incarne en particulier dans les relations qu'ont les mathématiciens avec l'infini. Ces relations ont abouti à ce que l'on a appelé la crise des fondements des mathématiques.

Cette crise, due en grande partie aux paradoxes suscités par l'acceptation d'objets infinis comme objets mathématiques, encourage des mathématiciens à étudier *mathématiquement* une partie de leurs activités mathématiques.

Ainsi est apparu et s'est développé la ***méta****mathématique* [7] dont la thèse de Church et la découverte de la machine universelle sont issues (Church 1935, Turing 1936). Ce que l'on va regarder de plus près.

Remarque. Bien sûr il y a encore d'autres histoires que l'on pourrait considérer. Même si le mécanisme behaviouriste, MEC-BEH est faux (et

---

[5] Caractère *universel* sur lequel nous reviendrons, c'est ce caractère que Descartes refusait aux machines.

[6] Ceci reste vrai pour la machine quantique de Deutsch. Elle n'est pas capable de calculer plus que la machine universelle de Turing (qui concerne cette section). Elle est cependant capable d'éxecuter plus rapidemment certaines procédures.

[7]Que l'on peut voir aussi comme une mathématique du mathématicien (un point de vue qui gagne en plausibilité et en clarté avec le mécanisme). L'expression est de Hilbert, et elle est reprise par Kleene dans son ouvrage fondamental (Kleene 1952). Le suffixe "méta" a un rôle différent du "méta" de la métaphysique (qui est plutôt une branche de la philosophie. En 3.3 cependant, on verra qu'avec MDI la métamathématique peut éclairer les métaphysiques, dans le sens des philosophes *et* dans le sens d'une physique du physicien.

donc aussi les autres mécanismes MEC-IND et MEC-FORT), le cerveau humain est ***au moins*** Turing universel comme n'importe quelle entité capable d'apprendre à émuler un système universel. En ce sens, l'origine de la vie est, ***au moins***, une histoire naturelle de machines universelles. Comme, selon toute apparence, les lois de la physique supporte des machines universelles, l'histoire de l'univers (pour autant qu'on donne un sens à cette expression) est encore une histoire, au moins, de machine universelle. De plus les machines universelles admettant une définition arithmétique simple, ce que l'on va voir, le mathématicien platoniste peut estimer que le concept de machine universelle est simplement intemporelle. Les histoires sont toujours des histoires de manifestations singulières.

2.1.4 La peur de la mort et l'infini

On peut vraisemblement distinguer deux composantes dans l'appréhension de la mort. Il y a d'une part, une composante instinctive qui nous invite à tenter d'éviter les situations potentiellement fatales. Celle-là est inextricablement liée à l'appréhension de la douleur et de toutes les choses du genre de celles que l'on peut redouter concernant la relation locale et immédiate qui caractérise la présence. Cette peur-là, je pense que nous la partageons avec les animaux.

Il y a d'autre part, une composante réflexive qui nous pousse à nous interroger globalement sur la signification ou le sens de cette présence et l'exercice impossible de concevoir l'absence de cette présence. Cette peur-là peut générer le désir de l'immortalité (pensons au paradis) ou la crainte de l'immortalité (enfer, Samsara, etc.). Ce n'est pas tant la composante réflexive qui nous pousse à donner des noms à des infinis (paradis, Dieu, etc.) mais plutôt la combinaison de cette réflexion avec la tentative de communiquer des réponses aux interrogations globales.

Ceci rend plausible que les capacités cognitives nécessaires pour se questionner sur la mort soient suffisantes et peuvent être nécessaires[8] pour apprendre à lire, écrire, compter, imaginer des conséquences et reconnaître la difficulté d'imaginer les conséquences.

Notons que la relation entre nombre (mathématique) et philosophie de l'esprit, pour le mécaniste a déjà été aperçue par Hobbes (voir Bernhardt 1989).

---

[8] Avec la thèse mécaniste

2.1.5 Les mathématiciens et l'infini

Introduction

Galilée était déjà troublé de la correspondance biunivoque, la bijection, qu'il avait constaté entre ω et l'ensemble des carrés : $\{x^2 \mid x \in \omega\}$:

```
0   1   2   3   4    5    6    7    8    9    10 ...
|   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |   ...
0   1   4   9   16   25   36   49   64   81   100 ...
```

Gauss se méfiait de l'infini et prohibait l'usage de l'infini actuel en mathématique, comme Aristote et St-Thomas pour qui la conception de l'infini en acte était réservée à Dieu (cf Dauben 1977). De même, Kronecker, dont on connaît l'assertion

> Dieu a créé les nombres naturels, tout le reste est l'oeuvre de l'homme.

contestera avec une certaine virulence les infinis actuels de la théorie des ensembles de Cantor (1895). L'infini pour Kronecker, Gauss ou St-Thomas est conçu *potentiellement*, comme une grandeur *toujours extensible*.

Certains mathématiciens ont voulu prouver l'existence de l'infini et en particulier de l'infinité des nombres naturels.

Une tentative célèbre est celle de Dedekind, contemporain et correspondant épistolier avec Cantor (Cavaillès 1962). Si Dedekind avait réussi dans son entreprise, il aurait découvert un moyen de communiquer en un nombre fini de mots l'extension de l'ensemble :

$$N = \{I, II, III, IIII, \ldots\} \qquad (*)$$

L'idée de Dedekind est d'appeler *nombres naturels* les éléments de cet ensemble et de les définir en donnant d'abord un axiome :

Ax. I est un nombre

et une règle :

R. Si X est un nombre alors X * I est un nombre

Et alors ? Comme Lewis Carroll[9] l'avait déjà remarqué, on ne peut pas vraiment se contenter de ça. Il faut encore dire qu'un nombre peut être obtenu uniquement par Ax ou par des applications de R. Combien ? Une application de R donne II. N serait égal à {I,II} ? Deux applications donnent III. Trois applications donnent IIII, etc. Mais "etc" fait partie de ce que l'on veut définir[10]. On aimerait dire : autant d'applications que vous voulez. Mais qu'est-ce que cela veut dire ? Cela veut-il dire que si je veux appliquer la règle 5 fois N serait = à {I, II, III, IIII, IIIII, IIIIII} ? Et si je veux appliquer la règle autant de fois que je veux puis-je exclure le string infini :

```
III...          (**)
```

Car enfin, si je peux comprendre les "..." dans (*), pourquoi ne les comprendrais-je pas dans (**). Dans ce cas je ne peux en tout cas pas exclure leurs successeurs qui proviennent de simples applications de R.

```
III...*I
III...*II
III...*III
```

Un nombre *fini* quelconque de fois précisera-t-on. Mais *les* nombres finis, c'est ce que Dedekind essayait *justement* de définir[11].

Webb explique que Dedekind en vint à démontrer l'existence de l'infinité des nombres naturels sur base de la capacité de l'esprit à générer des idées distinctes. Il s'agit plus d'une constatation empirique concernant une capacité de l'esprit que d'une démonstration mathématique puisque Dedekind ne définit pas le terme "esprit". Cependant, en faisant de cette capacité fondamentale, répétitive et créatrice, une loi de l'esprit, Dedekind illustre un phénomène récurrent dans les fondements des mathématiques. Sans doute parce qu'il s'agit d'un travail d'introspection collectif, le travail du mathématicien met celui-ci en face des capacités de son propre esprit, mais aussi en face de quelque chose de commun entre *soi et l'autre*.

---

[9] *Ce qu'Achille dit à la tortue.* voir Logique sans peine (Lewis Carroll "1966", il y a de magnifiques illustrations de Max Ernst dont une sympathique planaire). Ce texte est repris dans De Long 1971, voir aussi Hofstadter 1979 pour des variations sur ce thème.

[10] On peut relier cette difficulté au scepticisme de Hume sur l'"induction". La proposition "le soleil va se lever demain" nécessite un acte de foi dans une "théorie" (soit une théorie intuitive du genre "le soleil se lève tous les matins" ou plus sophistiquée comme "la terre est une boule etc..." ou la mécanique Newtonienne ...) accompagné de l'art d'interpréter la théorie ce qui revient à une abilité à commettre une expérience par la pensée (au moins celle qui permet de réaliser ultérieurement une expérience concrète). Le scepticisme que les mathématiciens aurait pu tirer de l'échec de Dedekind (ou de la fable de Carroll "1966") est plus profond que celui de Hume en ce sens qu'il concerne la possibilité même de communiquer la conviction qu'on sache faire les (le schèma des) expériences par la pensée inductive. Les mathématiciens, majoritairement, ne développeront pas de scepticisme particulier vis-à-vis de l'usage de l'induction (R). Les désaccords proviendront du degré d'induction permit, du choix des systèmes de formules ou structures possibles admissibles dans les domaines on l'on raisonne inductivement.

[11] Une analyse détaillée de l'échec de Dedekind est faite par Webb 1980, voir aussi Hofstadter 1979, qui analyse le traitement de Carroll.

notamment concernant la communication (le justification) de ses constructions et des ses raisonnements.

Remarquons qu'en échouant à prouver l'existence de l'infinité des nombres *finis* {I, II, III, ...}, Dedekind illustre la difficulté de définir les nombres finis eux-mêmes. Il a fallu admettre que la différence entre le fini et l'infini n'est pas susceptible d'être définie mathématiquement sans utiliser intuitivement au départ la notion de nombre naturel.

D'autre part il fut reconnu que cette capacité de l'esprit à distinguer, au moins partiellemment, le fini de l'infini et de générer des infinis particuliers à partir de descriptions finies, était ce sur quoi reposait une part essentielle de l'activité du mathématicien (un point de vue critiqué seulement par la branche ultraminoritaire des ultrafinitistes[12]). J'ai par exemple utilisé cette faculté lorsque j'ai défini l'ensemble des formules d'un système formel, l'ensemble des théorèmes d'une théorie, le principe de détermination de Gandy, ou (cas particulier du précédent) l'ensemble des états possibles d'un graphe booléen universelle (et donc extensible). Cette capacité intuitive est nécessaire pour commettre des expériences par la pensée et ce que Dedekind a montré c'est que les preuves mathématiques nécessitent de la part de ceux qui les étudient de commettre eux-mêmes une certaine expérience par la pensée. C'est en s'impliquant soi-même que le mathématicien arrache sa conviction introspective. On est alors en face de deux miracles: l'existence des nombres naturels (au moins comme indice d'une faculté de l'esprit) et le caractère commun de cet intuition chez les humains[13]. Warren McCulloch a saisi ce mystère dans la formule, titre de son papier : McCulloch W. C. 1961) :

> *What is a number, that a Man May Know It, and a Man, that He May Know a number ?*

Cantor

Contemporain et correspondant[14] de Dedekind, partant d'un problème de propagation de la chaleur, utilisant des séries trigonométriques pour approximer des solutions d'équations de la chaleur, étudiant la structure des domaines de convergence des séries en question, Cantor en vint à concevoir les nombres transfinis.

---

[12] "Ultra" ne doit pas être interprété péjorativement ou marginalement. Le point de vue finitiste fort est de se limité à une mathématique-objet finie (mais ouverte), plutôt que de limiter le finitisme à la métamathématique (formalisme Hilbertien). Une portion non triviale de mathématique et même d'analyse peut être développée sans axiome de l'infini (voir Van Bendegem 1987). Les finitismes sont des cas particuliers de ce que je dénomme plus loin par des écoles du dedans.

[13] Malheureusement cela est faux dans certaines situations pathologiques. F. Papy décrit des cas d'enfants débiles incapables de compter ou de donner du sens à la litanie des naturels. Cela ne les empêche pas d'être à même de résoudre des problèmes élémentaires de nature combinatoire, d'ordonnancement, ou des problèmes de labyrinthes. Certaines lésions cérébrales grave au niveau du cortex sont capables, semble-t-il d'abîmer cette faculté.

[14] Voir Cavaillès 1962.

Les ordinaux

Je vais, anachroniquement, présenter les ordinaux de Cantor, dans une représentation (ensembliste) due à von Neumann. Cela va nous permettre aussi d'illustrer deux idées de la logique contemporaine : la *réflexion* et la *compréhension*, et découvrir en passant une application d'une sorte de principe de Watts-Valadier local. L'analyse que je fais est informelle.

La ***compréhension*** consiste à faire d'un multiple une unité. Dans la représentation ensembliste naïve que je propose, cela va consister à dessiner un diagramme autour du multiple ou à placer le "multiple" entre accolades. La ***réflexion*** consiste à introduire dans l'univers ce qu'on a compris. L'univers étant censé représenter l'ensemble de toutes les choses que l'on peut comprendre. On obtient les ordinaux de Cantor (sous la forme de von Neumann) en partant d'un univers vide et en itérant successivement la compréhension et la réflexion. A chaque étape on opère une compréhension suivie d'une réflexion.

Au début, il n'y a rien dans l'univers. L'univers, à l'étape 0, se *présente* donc ainsi :

Il n'y a rien à voir. A l'étape 1, la compréhension consiste à mettre ce "rien" entre accolades ou de dessiner un diagramme vide, le résultat de l'étape 0 est {}, c'est l'ordinal appelé 0.

On "comprend", en quelque sorte que l'univers, à l'étape précédente est vide, qu'il n'y a rien dans l'univers, on *comprend* donc rien, ce qui donne un diagramme vide, ensuite on réfléchit. Cela revient à placer dans l'univers tout ce qu'on a compris, en l'occurrence le diagramme vide.

Evidemment à présent, à la fin de l'étape 1, l'univers n'est plus vide puisqu'il contient un diagramme vide :

A la deuxième étape la compréhension consiste à entourer ce que l'on a compris. Avec les accolades, le résultat de l'étape 2 est l'*ordinal* 1 = {0} = {{}}. ou, sous forme de diagramme : .. On réfléchit ce qu'on a compris c-à-d on introduit ce qu'on a compris dans l'univers. L'univers ressemble donc à :

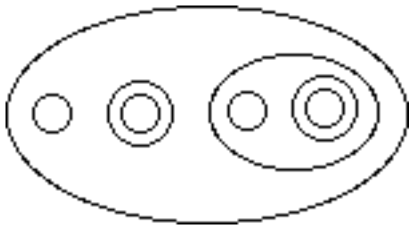
L'univers, à ce stade, est l'ordinal 2 de Von Neuman. 2 = {{} {{}}} = {0 1}

A l'étape 3, nous devons *comprendre*, c-à-d entouré tout ce qu'on a compris :

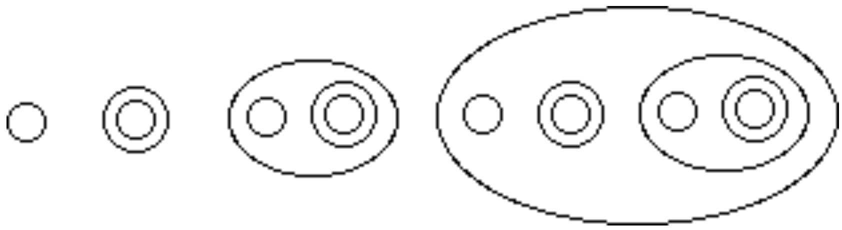
et puis réfléchir, donc rajouter dans l'univers ce qu'on a compris : on obtient :

C'est l'ordinal 3 de Von Neuman. 3 = {{} {{}} {{} {{}}}} = {0 1 2}

Et on continue, comprendre donne :

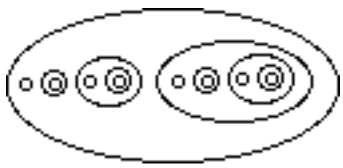


Réfléchir donne :

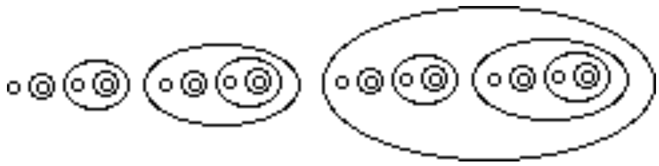


C'est l'ordinal 4 de Von Neuman: 4 = {{} {{}} {{} {{}}} {{} {{}} {{} {{}}}}} = {0 1 2 3}.

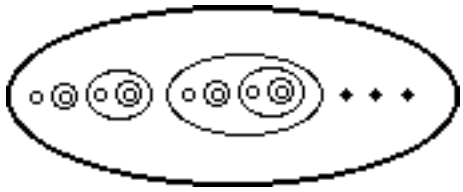
On continue, comprendre donne :



et on réfléchit :



Arriver à ce stade on serait tenter de s'exclamer "bon, ça va, on a compris..." et se faire l'image suivante de l'univers

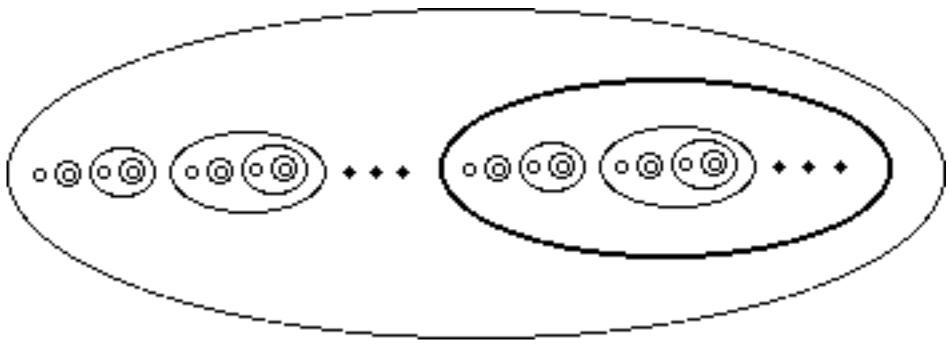


C'est l'ordinal que Cantor notait déjà ω, ω = {0 1 2 3 4 5 6 ...}.

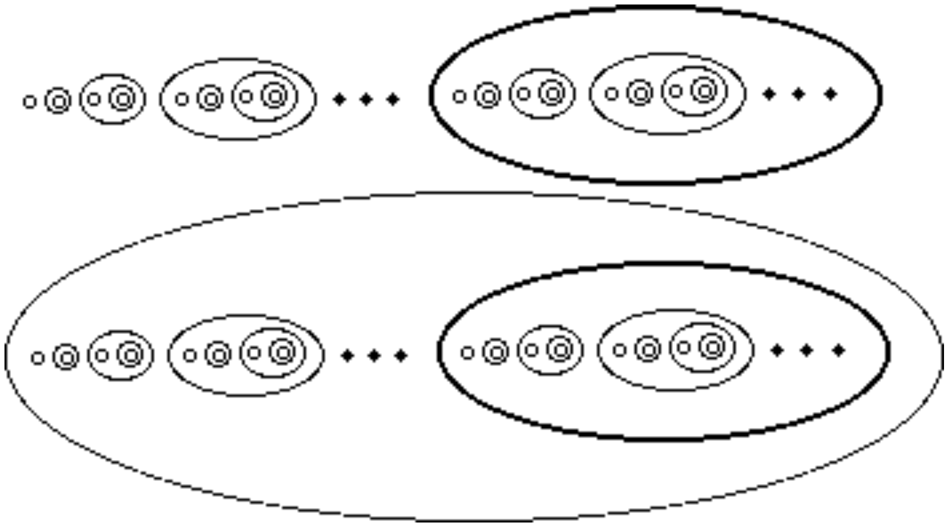
Mais, et on peut déjà deviner une application locale du principe de Watts-Valadier, une telle prétention est vaine, car si on a compris l'univers, rien n'empêche de *réfléchir* une fois de plus, ce que l'on a cessé de faire :

on obtient l'ordinal ω+1 = {0 1 2 ..., ω},

... ce que l'on peut encore comprendre :



et réfléchir:



c'est l'ordinal $\omega+2 = \{0\ 1\ 2\ 3\ ..., \omega, \omega+1\}$, que l'on peut encore comprendre, et réfléchir, comprendre et réfléchir, comprendre et réfléchir.

J'aurais aimé terminer la phrase précédente par "etc.", mais on devine que ce "etc" est ambigu. Si ce "etc" signifie qu'on a trouvé un moyen de générer l'univers, alors tout ce qu'on a obtenu c'est une approximation, certes définissable, qui par réflexion doit être plongée dans l'univers, ce qui réfute que l'approximation est identique à l'univers.

On peut y voir une application locale du principe de Watts-Valadier : si on définit l'univers par l'ensemble de tout ce que je peux comprendre, et si on considère les propositions du style p = "j'ai compris la structure de l'univers", alors $\Box p \rightarrow \neg p$, où $\Box$ est une communication "positiviste" En effet pour que $\Box$ soit positiviste (vérifiable) il faut être à même de présenter de façon finie une façon de générer l'univers, mais à partir de cette présentation on définit un nouvel élément de l'univers (par réflexion) ce qui montre que ce que l'on présentait n'est pas l'univers. Non seulement la communication infirme p, mais elle l'infirme constructivement, à partir de cette communication on peut prouver $\neg p$. On a donc ici une forme élémentaire d'apprentissage autonome :

$$\Box p \dashrightarrow \Box' \neg p,$$

où $\Box'$ représente une correction de $\Box$, ainsi qu'un passage à un ordinal supérieur.

Attention : ici p est simplement une proposition fausse et réfutable alors que, dans la situation théologique de la partie 1, p est vraie et reste vraie (p est stable), c'est pourquoi l'application du principe est locale.

Montons encore plus haut et un peu plus rapidement :

$0, 1, 2, 3, \ldots\ \omega$

$\omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \omega+4, \ldots\ \omega+\omega = \omega.2$

$\omega+\omega+1, \omega+\omega+2,\ \omega+\omega+3,\ \omega+\omega+4,\ \ldots \omega+\omega+\omega = \omega.3$

…

$\omega.4,\ \omega.5,\ \ldots \omega.\omega$

$\omega.\omega+1, \ldots \omega.\omega + \omega, \ldots \omega.\omega+\omega.\omega = \omega.\omega.2, \ldots \omega.\omega.\omega = \omega^3, \ldots \omega^4, \ldots, \omega^5, \ldots, \ldots \omega^\omega, \ldots$

Chaque processus de génération définit ce qu'on appelle un ordinal limite. Plonger l'ordinal limite dans l'univers est l'étape délicate[15] selon Gauss, Kronecker, etc.

Ensembles dénombrables et indénombrables

Un ensemble dénombrable est un ensemble qui entretient une certaine relation avec ω.

définition : Un ensemble E est dénombrable s'il existe une fonction surjective de ω dans E.

Ex : L'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des rationnels. En effet ils sont codables par des expressions contenues dans l'ensemble des mots sur le langage L = {I, /}. (ex : IIIII/III). Ceci peut paraître étonnant vu la densité des rationnels sur la droite numérique.

définition : J'écris $|\mathbf{A}| < |\mathbf{B}|$ pour dire qu'il n'existe pas de surjection de B dans A.

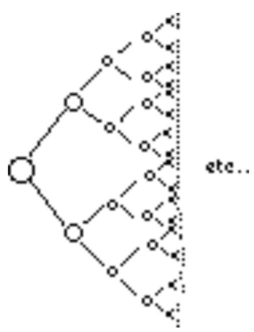
On peut facilement se convaincre des résultats suivants :

$|0| < |1| < |2| < |3| < |4| < \ldots < |\omega| = |\omega+1| = \ldots = |\omega^\omega| = |\omega^\omega + 1|$.

Tous les ensembles seraient-ils dénombrables ? Tous les ordinaux seraient-ils dénombrables ? Cantor répond négativement à cette question :

Les cardinaux

Considérons à nouveau l'éventail :



Il peut représenter les destins possibles de ceux qui se dupliquent itérativement. Et considérons qu'ils soient tous immortels. Un destin est

[15]On trouvera dans Rudy Rucker 1982 d'autres réflexions sur les ordinaux et cardinaux transfinis, y compris des réflexions théologiques.

alors équivalent à une suite infinie de 1 et de 0, c-à-d une fonction de ω -> 2, ou encore une partie de ω (en identifiant une partie avec sa fonction caractéristique, par exemple, la suite 1010011101… correspond naturellement à la partie {0, 2, 5, 6, 7, 9, …}).

Théorème : (Cantor) : *2^{ω}* n'est pas dénombrable.

Je donne deux démonstrations. La première met assez bien en évidence la diagonale, la seconde est plus proche de celle originellement donnée par Cantor et est formellement proche des raisonnements qui mène à des paradoxes, en l'occurrence, je vais la comparer au paradoxe de Russell (voir aussi Ladrière 1957).

a) S'il existait une bijection i -> F_i entre ω et 2^{ω}, alors la fonction g de ω dans 2 telle que

$$g(i) = 1 - F_i(i), \qquad \text{(première diagonalisation)}$$

n'appartiendrait pas à 2^{ω}. En effet si elle appartenait à 2^{ω}, elle serait l'image g = Fk d'un naturel k, et on aurait :

$$g(k) = F_k(k) = 1 - F_k(k), \qquad \text{(deuxième diagonalisation)}$$

Graphiquement cela revient à changer les valeurs sur la diagonale :

$$\begin{array}{llcccccc}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\
F0 & \text{->} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
F1 & \text{->} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
F2 & \text{->} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
F3 & \text{->} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
F4 & \text{->} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

La suite qui n'appartiendrait pas à cette énumération est 11011..., par construction elle diffère de toutes les suites présentées.

Remarque : on démontre de façon identique qu'il n'existe pas de bijection entre ω et ω^{ω}.

b) directement en terme de parties : soit b la bijection entre ω et Pω (l'ensemble des parties de ω). Pour chaque nombre naturel n, on a : $n \in b(n)$ ou $n \notin b(n)$. Considérons la partie A de ω, définie ainsi :

$$A = \{n \mid n \notin b(n)\}. \quad \text{(première diagonalisation)}$$

Comme b est une bijection de ω dans $P\omega$, il existe un $a \in \omega$ telle que $b(a) = A$. On a donc (deuxième diagonalisation) : $a \in A$ si et seulement si $a \notin A$: absurde.

Il semble qu'on ait ainsi démontré l'existence d'un ensemble infini qui ne peut pas être mis en bijection avec ω : un nouvel infini. La démonstration fonctionne pour n'importe quel ensemble. On a donc mis en évidence une hiérarchie infinie d'ensembles infinis. Selon Dauben 1979 c'est la découverte que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable qui fut le point de départ de sa théorie du transfini.

2.1.6 La preuve de Cantor est-elle *convaincante* ?

Le paradoxe de Russell

Un ensemble x est un élément de lui-même, ou n'est pas un élément de lui-même, ce qui découle du principe du tiers exclu.

Considérons alors l'ensemble :

$$a = \{x \mid x \notin x\} \quad \text{(première diagonalisation)}$$

Russell pose la question :

$$a \in a \ ? \quad \text{(deuxième diagonalisation)}$$

Si $a \in a$ alors $a \in \{x \mid x \notin x\}$ et donc $a \notin a$. De même si $a \notin a$, alors $a \in \{x \mid x \notin x\}$, et $a \in a$. On a $a \in a$ si et seulement si $a \notin a$. Contradiction. Cela ressemble à une démonstration par l'absurde, mais quelle hypothèse faut-il rejeter ? Faut-il rejeter le principe du tiers-exclu ?, la diagonalisation ?, ou restreindre l'usage des accolades : {... | ...}, ou quoi encore ... ?

Comment être *convaincu* par les démonstrations du théorème de Cantor puisqu'un raisonnement tout à fait similaire conduit à une franche contradiction ?

Plus généralement notons XY l'application[16] (au sens large) de quelque chose X sur quelque chose Y. La nature précise de l'application est définie par X, Y et le contexte : ainsi XY peut représenter les applications du genre :

---

[16] Voir aussi Marchal 1988.

le robot X répare la machine Y;
le catalogue X répertorie le livre Y;
l'adjectif X convient au mot Y;
l'ensemble X contient l'élément Y;
le barbier X rase la barbe de l'individu Y;
le jardinier X taille la plante Y;

Remarquons que le robot est une machine, le catalogue est un livre, l'adjectif est un mot, l'ensemble *peut* être un élément, le barbier est un individu. Au contraire le jardinier *n'*est *pas* une plante. Supposons à présent qu'il existe, dans quelque contexte, un sujet Z qui ne s'applique à un objet X qu'à l'unique condition que X ne s'applique pas à lui-même :

$$ZX \leftrightarrow \neg(XX) \quad \text{(première diagonalisation)}$$

(par exemple un robot Z qui ne répare que les machines (éventuellement robots) qui ne se réparent pas eux-mêmes) On est alors confronté à une situation paradoxale : en effet que peut-on dire de l'applicabilité de Z sur lui-même ? On a, par substitution de X par Z :

$$ZZ \leftrightarrow \neg(ZZ) \quad \text{(deuxième diagonalisation)}$$

c-à-d : Z s'applique à Z si et seulement si Z ne s'applique pas à Z. ZZ est un point fixe de la négation.

Par exemple le barbier Z se rase lui-même si et seulement si il ne se rase pas lui-même. En ce qui concerne le contexte du barbier on sort de la situation paradoxale en interprétant le raisonnement présenté comme une preuve par l'absurde de l'inexistence d'un tel barbier. Beaucoup de paradoxes (Russell, Richard, Berry...) sont des cas particuliers de cette situation paradoxale.

Est-il possible d'interpréter cette double diagonalisation comme une preuve que dans tout contexte un tel Z n'existe pas ? Les réponses possibles constitueront les attitudes possibles que l'on peut respecter dans chacun des contextes face à la situation paradoxale générée par la double diagonalisation présentée.

Voici en outre un paradoxe dû à Cantor lui-même. Il l'aurait laissé dormir pendant 12 ans dans un tiroir.

Soit U l'ensemble universel, c-à-d l'ensemble de tous les ensembles. D'une part :

$$|U| < |2^U|$$

en vertu du théorème de Cantor, d'autre part :

$$|2^U| < |U|$$

car tous les éléments de 2^U sont des éléments de U.

On peut distinguer 2 grands schémas de solutions, les solutions typées ou prédicatives, où l'on interdit en gros les auto-applications[17] (solutions Russelliennes), et les solutions non-typées (imprédicativité, intuitionisme, non-fondation, fermeture pour la diagonalisation, etc ..) où l'on permet et favorise les auto-applications (solutions Austiniennes). L'approche présente sera plus Austinienne que Russellienne.

On peut cependant reconnaître deux attitudes plus profondément différentes et liées à la conception de l'infini face à ces paradoxes : soit on renonce à considérer les objets infinis comme des êtres actualisables. C'est la "solution" intuitioniste de Brouwer[18]. Soit on tente d'abord de capturer axiomatiquement les objets infinis dans un système formel et ensuite de prouver, sans utiliser d'objets infinis, et donc de façon finitiste la consistance du système formel.

En effet dans ce cas les contradictions générées dans un raisonnement par l'absurde ne peuvent être produites que par l'hypothèse ab absurdo introduite dans la démonstration.

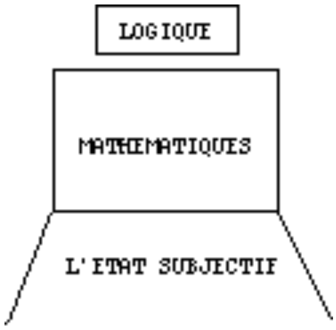
La première attitude est celle des mathématiciens *pré-intuitionistes* qui, comme Galilée et Gauss, mais aussi Lebesgue, Kronecker, Poincaré considèrent l'infini comme un potentiel jamais achevé. La deuxième attitude fut celle de Hilbert et fut l'origine de son programme axiomatique et métamathématique. Un programme qui échouera et *doit échouer* comme le démontrera Gödel (voir plus loin).

On peut schématiser la conception des mathématiques de Brouwer avec le schéma suivant :

---

[17]En l'absence d'auto-application il n'y a pas de problèmes, par exemple : tout ce que l'on peut dire du jardinier Z est qu'il taille toutes les plantes, à moins qu'il n'y ait une plante qui se taille elle-même, dans ce cas le jardinier ne la taille pas. Quant à savoir si le jardinier se taille lui-même, la question ne se pose pas. A moins que l'on conçoive un monde où certains jardiniers sont des plantes. On voit que l'interdiction du plongement est à la base de l'intuition de sécurité Russellienne. Avec les programmes cela permet une contrôlabilité liée au typage, on peut dans ce cas garantir l'existence du plus petit point fixe. Ceci est lié au *premier théorème de récursion* qui sort du cadre de ce travail.

[18] Voir Brouwer 1948, 1946-1951. J'écris intuitionisme avec un m, comme Largeaut 1992, 1993, pour désigner la philosophie de Brouwer, ainsi que les philosophies ou logiques dérivées. Une introduction classique aux mathématiques intuitionistes est Heyting 1956. Voir aussi Dummett 1977, Troelstra et van Dalen 1988, Largeault 1992 et 1993.



Solipsisme

Les objets mathématiques sont considérés comme étant des constructions mentales. Ces objets sont jugés indépendants du langage. Le mathématicien crée le monde mathématique, et la logique n'est que le reflet de l'utilisation du langage pour la communication entre mathématiciens.

Brouwer était solipsiste (voir Van Stigt pour plus d'information à ce sujet, voir aussi son écrit de jeunesse 1905), et la philosophie intuitioniste des mathématiques est solipsiste relativement aux objets mathématiques. En particulier lorsqu'un solipsiste affirme qu'un objet mathématique existe, c'est qu'il se sent capable de le construire, et son éventuelle communication sera une exhibition.

Un exemple commun de preuve non-constructive :

Proposition il existe un couple d'irrationnel (x, y) tel que x^y est irrationnel. preuve : ˆ2 est irrationnel[19], alors si ˆ2$^{\text{ˆ}2}$ est rationnel, le couple (ˆ2,ˆ2) est une solution, si ˆ2$^{\text{ˆ}2}$ est irrationnel, alors (ˆ2$^{\text{ˆ}2}$)$^{\text{ˆ}2}$ = 2, ce qui donne une solution. Nous savons donc que la solution se trouve dans l'ensemble {(ˆ2,ˆ2), (ˆ2$^{\text{ˆ}2}$,ˆ2)}, mais aucun moyen de choisir parmi les deux solutions n'a été présenté. Il s'agit d'une preuve d'existence non constructive[20], sans exhibition de la solution. Le principe du tiers-exclu a été utilisé sous la forme : *x est rationnel* ∨ *x n'est pas rationnel*.

La seconde attitude, celle de Hilbert, consiste à tenter de sauver "le paradis Cantorien". Elle repose sur une conception platoniste des

[19] Incidemment ceci est démontré plus loin

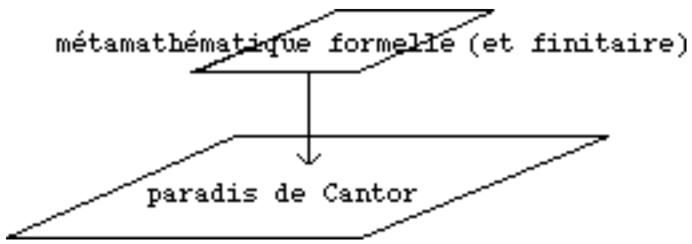
[20] Il ne faut pas croire que le point de vue constructif est nécessairement plus pragmatique. Imaginons deux pays A et B en guerre. Les espions travaillant pour le pays A rapporte que le pays B se prépare à une attaque nucléaire sur A. Les espions ont déduit (classiquement et non-intuitionistiquement) à partir de leurs informations, que le missile nucléaire sera envoyé, à telle date précise et proche, sur le pays A, à partir de la base militaire B1 ***ou*** de la base militaire B2. Une stratégie naturelle pour l'armée de A est d'attaquer *les deux bases* militaires B1 ***et*** B2. Dans ce cas-ci, une proposition classique A ∨ B, avec un ou non constructif donne manifestement une information utile capable d'activer des procédures parallèles. Nous verrons qu'en intelligence artificielle théorique, les propositions nécessairement non constructives abondent. Notons que nous en avons déjà rencontré : le "∨" de "se retrouver à Moscou ***ou*** à Washington" dans l'expérience de la duplication (quantique ou non quantique, voir 1.3) est nécessairement non-constructif. Par ailleurs il active aussi des activités parallèles.

mathématiques, éventuellement justifiée de façon finitaire. Il s'agit d'un point de vue platoniste Hilbertien précédant les résultats d'incomplétude.

Platonisme

La démonstration du théorème de Cantor est une démonstration par l'absurde : elle suppose implicitement la consistance du raisonnement et des présupposés mathématiques. Hilbert réalise que pour sauver le "paradis de Cantor", il est nécessaire de prouver la consistance d'un édifice mathématique formel suffisamment riche que pour refléter - disons la théorie des ensembles - et ensuite la construction d'une preuve, finitiste, de sa consistance. Ainsi est née la métamathématique[21].

L'idée de Hilbert est de justifier l'usage des infinis Cantoriens en montrant que les manipulations symboliques les concernant (qui sont des manipulations formelles et donc finitairement descriptibles[22]) ne peuvent pas conduire à une contradiction[23].



Comme on sait, et comme je vais le (re)montrer plus loin, le programme de Hilbert a échoué.

Gödel montre qu'à partir du moment où la métamathématique finitaire est assez riche que pour refléter l'arithmétique élémentaire (aussi bien intuitioniste que classique par ailleurs), elle ne sera non seulement pas à

21 L'analyse *classique*, entre autres, repose en grande partie sur l'utilisation de l'infini et des définitions imprédicatives.

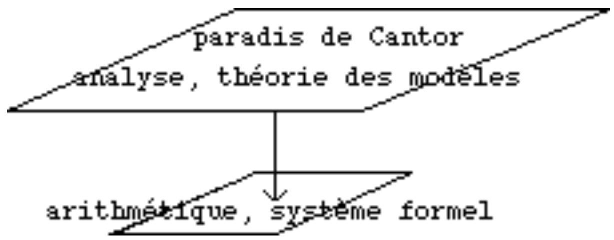
22 Une analyse profonde des relations entre la philosophie mécaniste et le programme formaliste de Hilbert a été effectuée par Webb (1980).

23 Le but est en soi raisonnable, cf Smorynski 1985, page 3sq.

même de prouver la consistance d'une extension Cantorienne d'elle-même, mais elle ne peut pas prouver la consistance d'elle-même, à moins d'être elle-même inconsistante. Intuitivement, on reconnaît le principe de Lao Tseu-Watts-Valadier, ceci sera encore précisé.

Suite à l'échec du programme de Hilbert, un retournement de situation va *nécessairement* s'opérer : on doit utiliser des mathématiques Cantorienne, où d'éventuelle portion, la plus restreinte possible du "paradis[24]", pour prouver la consistance de l'arithmétique élémentaire, ou pour analyser le degré de complexité des preuves exprimables dans un système formel.

C'est ainsi que vont naître les théorie des modèles, avec les travaux sémantiques de Tarski, Löwenheim, Skolem, etc. :



Si on oppose de façon simple le platonisme et l'intuitionisme, on peut, comme Dummett 1963, tirer de Gödel 1931 un argument en faveur de l'intuitionisme. Mais cet argument n'est pas nécessairement en défaveur du platonisme. L'intuitionisme et le platonisme ne sont peut-être pas si opposés que les querelles entre Cantor et Kronecker, ou entre Hilbert et Brouwer le laissent croire[25].

Remarque Quoique Brouwer dédaignait le formalisme et surtout les entreprises de formalisation de la logique, il dira pourtant de la formalisation de la logique intuitioniste, c'est-à-dire au sens large, la logique de la construction, due à Heyting, qu'elle dépassait en importance la preuve de l'incomplétude par Gödel.

Si l'on prend pourtant à la lettre la philosophie solipsiste de la conscience de Brouwer (voir Brouwer 1905), le travail de Heyting semble plutôt sacrilège. Et ironiquement, c'est ce sacrilège qui a permis, à travers Gödel, aux logiciens classiques de découvrir les qualités de l'approche intuitioniste.

Brouwer semble avoir été conscient de l'intérêt des mathématiques intuitionistes pour l'étude de la pensée :

[24] "*Nul ne nous chassera du paradis de Cantor*" a dit Hilbert 1925, en pensant à Brouwer.

[25] Certains intuitionistes comme Dummett sont assez virulent à l'égard de la logique classique.

Let those who come after me wonder why I built up the mental constructions and how they can be interpreted in some philosophy ; I am content to build them in the conviction that in some way they will contribute to the clarification of human thought (cité par Goldblatt 1979 page 173).

Inspiré par Grzegorczyk (1964), mais aussi par la sémantique commune de Kripke pour S4 et la logique intuitioniste (voir 1.2), je suis ouvert à la possibilité que la logique de la subjectivité, peut être émergeante chez une machine, soit de nature intuitioniste dans la mesure ou celle-ci est une logique de l'extension (continue) de soi.

J'accepte, aussi bien avec Bohr (dans le contexte quantique) qu'indirectement avec Brouwer, le fait que la logique classique est une logique de la communication platoniste. Je donne ainsi explicitement un rôle privilégié à la logique classique. Ce sera explicité et utilisé en 3.3.

2.1.7 Les inspirations religieuses de Cantor et Brouwer

Etant donné que j'aborde dans ce travail des questions théologiques, il serait difficile de considérer les travaux théologiques aussi bien de Cantor que de Brouwer comme étant purement anecdotiques.

Sous l'influence du pape Léon XIII à la fin du siècle passé, s'est développé un renouveau pour la philosophie thomiste ou néothomiste.

Alors que Cantor était harcelé par le pré-intuitioniste Kronecker, découragé de l'attitude des mathématiciens à son égard, Cantor, non-catholique mais à l'esprit religieux (Dauben 1977, Thuillier 1980), trouve un véritable encouragement dans l'intérêt que les théologiens (catholiques romains) montrent pour ces travaux. Une correspondance importante entre Cantor et des théologiens étaye ce fait.

St-Thomas jugeait les infinis actuels comme étant des entités auto-contradictoires et quelques théologiens (comme Gutberlet) ont utilisé le transfini de Cantor pour justifier l'*actualisation de l'infini*. Cantor lui-même pensait que, loin de rivaliser avec l'infinité absolue de Dieu, le caractère multiple et toujours extensible des cardinaux et des ordinaux tranfinis ne pouvait qu'agrandir la gloire de Dieu.

Pour Cantor, l'essence des mathématiques réside dans sa liberté et dans une identification platonicienne, qui caractérise le "paradis" (les mathématiques) de Cantor, entre l'existence et la consistance, identification ultimement réalisée par Dieu. Il estime alors que le transfini est un outil pour le théologien. Ce qui, on l'illustrera, est d'autant plus plausible pour le *théologien mécaniste*.

A l'extrême opposé du platonisme de Cantor, se trouve le solipsiste Brouwer, mais dont l'esprit est tout autant religieux. En fait Brouwer était mystique. Un mystique n'a en général plus besoin de la foi ou de l'espérance dans l'immortalité en ce sens qu'il en aurait fait "l'expérience". Une expérience, qui comme toute expérience, est difficile à décrire avec des mots (finis), mais qui est souvent décrite comme un changement qualitatif de la perception de soi.

Le soi, immédiat et subjectif, joue un rôle majeur dans la philosophie de Brouwer, et il admet un reflet dans sa philosophie des mathématiques, notamment dans son utilisation du "sujet créateur", fort controversé chez les constructivistes et les intuitionistes contemporains.

Voici comment Van Stigt 1990 résume le rôle du soi et sa qualité mystique chez Brouwer :

> *Analysing knowledge, certainty and truth Brouwer recognized that certainty is inner conviction and that the only authority and arbiter of truth is to be sought in the individual conscious self. His point of departure is the individual mind in its widest sense, the Aristotelian "Soul", and the existence of a supra-sensual reality which is the Soul's natural world, which presents itself directly to the Soul and is by its very nature impossible to capture in words. Occasionally it reveals itself indirectly, through the veils of the physical world e.g. through works of art. The intellect can grasp aspects of this reality through abstraction; these intellectual images, however, are earthbound and man-made. (Van Stigt page 119).*

Je montrerai que la philosophie mécaniste permet et rend nécessaire une réconciliation entre Kronecker et Cantor, entre Brouwer et Hilbert[26], et d'une façon générale entre l'intuitionisme et le platonisme. Toutefois ce compromis est sans doute cher autant pour l'intuitioniste que pour le platoniste : pas moins que la reconnaissance de l'autre (et de l'inconnu) pour le solipsiste, et l'immatérialisme, l'indéterminisme et une forme de relativisme pour le Platoniste, lequel est aussi contraint de reconnaître l'existence du "soi", et le filtrage *a priori arbitraire, tangent, mais corrigeable* qu'il impose sur la réalité.

Pour paraphraser Kronecker, et en anticipant la suite, le mécanisme prendra plutôt la forme :

> *Dieu a créé les nombres naturels, tous le reste sont des rêves de nombres naturels*

A présent j'emprunte un raccourci vers la thèse de Church en passant par Pythagore. C'est aussi un raccourci vers le théorème de Gödel. La stratégie consiste à coincer les paradoxes en précisant les termes.

---

[26] Notons que si Cantor fut harcelé par Kronecker, de même une dispute professionnelle entre Hilbert et Brouwer fut assez sérieuse, au point que Born (cf 1.1) demanda à Einstein d'intercéder en faveur de Hilbert (voir la correspondance entre Born et Einstein, Einstein & Al. 1916-1955).

2.1.8 Un raccourci vers la thèse de Church en passant par Pythagore

Lewis Carroll raconte que Pythagore aurait sacrifié "une hécatombe de boeufs" pour fêter l'avènement de son fameux théorème *dans un triangle rectangle le carré de l'hypothénuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés* (Carroll 1888). Pourtant, c'est un corollaire de ce théorème qui a fragilisé la philosophie de Pythagore comme quoi *tout est nombre* (naturel). En ce qui concerne les longueurs ou les temps, il semble que Pythagore entendait "tout est nombre" par "tout est nombre ou rapport de nombres", comme il l'avait d'ailleurs déjà illustré en musique. Le théorème de Pythagore entraîne en effet que la longueur de la diagonale d'un carré de côté de longueur 1 vaut $\sqrt{2}$. Or $\sqrt{2}$ ne s'exprime pas sous forme de rapport de nombres entiers :

proposition Il n'existe pas de nombres naturels p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$.
preuve si p et q existe, il existe a et b sans diviseur commun tel $\sqrt{2} = a/b$ (la fraction est simplifiée). On a $\sqrt{2} = a/b$ entraîne $2 = a^2/b^2$, ce qui entraîne $a^2 = 2b^2$, ce qui entraîne que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair, ce qui entraîne qu'il existe un nombre naturel k tel que $a = 2k$, donc $a^2 = 4k^2 = 2b^2$, donc b^2 est pair, donc b est pair. Absurde puisque la fraction était simplifiée.

Mais nous savons que $\sqrt{x}$ est calculable. La technique de calcul est enseignée à l'école.

Et si des longueurs ne sont pas définissables au moyen de / et ω, pourquoi ne pas tenter de sauver Pythagore en interprétant "tout est nombre", non plus par "tout est nombre ou rapports de nombres", mais par "tout est nombre ou rapports de nombres *ou racines de nombres*" -c-à-d en termes de / √ et ω ? Pythagore aurait eu encore du bon temps car il faudra attendre assez longtemps pour qu'on découvre qu'il existe des longueurs ou des temps qui ne s'expriment ni comme rapports ni comme racines de nombres (les nombres transcendants, auquel e et π appartiennent comme l'ont montré Hermite en 1873 et Lindemann en 1882, voir Simmons 1992).

On voit donc apparaître une succession d'écoles Pythagoriciennes possibles: P1, P2, ... Chacune suppléant à l'échec de la précédente en rajoutant un symbole dans son langage. La question est de savoir si cette suite va converger[27], c-à-d s'il existe une école Pythagoricienne dont le langage sera assez riche que pour décrire toutes les mesures concevables, ou toute les fonctions calculables.

---

[27] J'utilise ici le terme converger dans le sens des informaticiens. La suite converge si tous ses termes sont identiques à partir d'un certain moment. {Pi} converge s'il existe un j tel que pour tout k > j, Pj = Pk. Une telle suite se stabilise sur un voisinage de l'infini.

Comme on peut identifier les nombres réels (mesure de longueur, mesure de temps, d'une façon générale : mesure physique) avec les fonctions de ω dans 2, (ou avec certaines fonctions de ω dans ω), la question se ramène à savoir s'il existe un langage capable de décrire toutes les fonctions calculables de ω dans 2. Un tel langage pourrait servir alors pour définir, une fois pour toutes, la notion même de fonction calculable.

Mais une telle notion n'est-elle pas trop riche comme l'univers dans la génération des ordinaux de Cantor ? Un principe de Watts-Valadier ne va-t-il pas se mettre en branle ?

On *peut* le craindre. Je vais en effet d'abord montrer, *de façon erronée,* que toutes les écoles Pythagoriciennes vont échouer. La suite des écoles *semble* ne pas pouvoir converger. Ensuite, je vais réfuter cette réfutation.

Théorème (pessimiste et provisoire) Toutes les écoles Pythagoriciennes sont condamnées à échouer.

preuve (trouver l'erreur, modifier plutôt l'énoncé du théorème ou la définition des écoles Pythagoriciennes) Supposons qu'il existe une école Pythagoricienne P possédant un langage L tel que toute fonction calculable est définissable dans ce langage.

Ce langage est fini (il possède un nombre fini de symboles). On peut donc ranger par ordre lexicographique[28] toutes les définitions de fonctions exprimables dans le langage L. On obtient ainsi une énumération des fonctions définissables dans L : $\{F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, ...\}$. A présent la fonction g définie ainsi :

$$g(i) = 1 - F_i(i), \qquad \text{(première diagonalisation)}$$

est calculable puisque chacune des F_i est calculable et qu'avec la donnée de L la diagonalisation est effective puisqu'on s'est restreint avec des fonctions définissables dans le langage L, définitions qu'on sait dès lors générer de façon routinière : $\{F_i\}$.

$$\begin{array}{lcllllll}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
F0 & \to & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
F1 & \to & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
F2 & \to & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
F3 & \to & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
F4 & \to & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Mais g n'admet aucune description dans L, car si tel était le cas, il existerait un k tel que $g = F_k$, et alors:

[28] C'est-à-dire : ranger par longueur (nombre d'occurrence de symboles dans l'expression) et ranger par ordre alphabétique les expressions de même longueur)

$$g(k) = F_k(k) = 1 - F_k(k), \qquad \text{(deuxième diagonalisation)}$$

Absurde.

Remarquons que cette preuve est constructive. A partir d'une école P, et de son langage L, on a explicitement construit une fonction calculable, non définissable dans L, qui réfute ainsi les prétentions de P. On peut donc créer la nouvelle école Pythagoricienne, avec un nouveau symbole F_ω désignant la nouvelle fonction introduite. Cette école sait calculer les F_i, et F_ω:

$$\{F_1, F_2, F_3, F_4, ..., F_\omega\}$$

Mais cet ensemble est encore énumérable, on peut ranger les fonctions ainsi :

$$\{F_\omega, F_1, F_2, F_3, F_4, ...\},$$

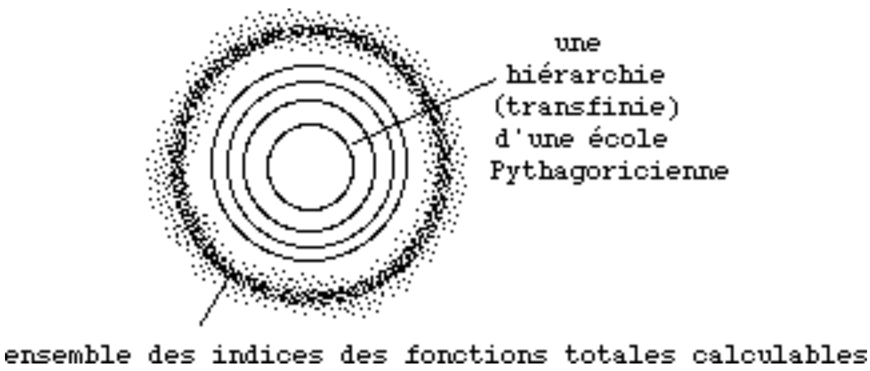
diagonaliser à nouveau, pour obtenir

$$\{F_1, F_2, F_3, F_4, ..., F_\omega, F_{\omega+1}\}$$

Et ainsi de suite sur les ordinaux de Cantor:

$$\{F_1, F_2, ..., F_\omega, F_{\omega+1}, ...F_{\omega+\omega}, ... F_{\omega+\omega+\omega}, ..., F_{\omega\omega}, ..., F_\omega{}^\omega, ..., F_{\varepsilon_0}, \ldots\}$$

Mais aucune école ne semble être à même de réaliser le rêve Pythagoricien de capturer avec un nombre fini de symboles la totalité des indices des fonctions calculables[29]. ce que j'appelerai souvent le *graal :*



[29] Un néo-platonicien dirait-il que la négation est constituante ? (Trouillard 1972)

A chaque école on peut associer une hiérarchie transfinie d'écoles successives qui l'étend. Certaines suites peuvent tendre vers le graal, mais si tel est le cas cela ne peut certainement pas être *prouvé par aucune école du dedans* sous peine de définir une école *prétentieuse* (voir plus bas).

Pourtant, vers la fin de l'année 1933, Alonzo Church possède un langage, *le calcul lambda*, dans lequel on peut décrire, prétend-il à Stephen Cole Kleene, *toutes* les fonctions calculables. Church propose même de *définir*, en fait, l'ensemble des fonctions calculables par l'ensemble des fonctions λ-définissable. Kleene y verra cependant une thèse, et pendant un temps il s'estimera capable de la réfuter (par diagonalisation).

2.1.9 Kleene's Overnight

En 1979, Kleene raconte :

> *The concept of λ-definability existed full-fledged by the fall of 1933 and was circulating among the logicians at Princeton. Church had been speculating, and finally definitely proposed, that the λ-definable functions are all the effectively calculable functions... When Church proposed this thesis, I sat down to disprove it by diagonalizing out of the class of the λ-definable functions. But, quickly realizing that the diagonalization cannot be done effectively, I became overnight a supporter of the thesis* (cité dans Davis 1982)

Pour comprendre comment cela est possible, il suffit de bien saisir l'erreur dans la démonstration du théorème pessimiste et provisoire. A cette fin je propose de distinguer trois sortes d'écoles Pythagoriciennes. Les écoles *du dedans*, les écoles *prétentieuses* et les écoles du dehors.

Les écoles prétentieuses et les écoles du dehors ont l'ambition de construire un langage dans lequel on peut définir *toutes* les fonctions calculables, ce que ne cherche pas les tenants des écoles Pythagoriciennes du dedans. Ceux-ci se contentent d'escalader les hiérarchies Pythagoriciennes

Les écoles prétentieuses exigent que leurs langages permettent la description de toutes les fonctions calculables ***et uniquement ces fonctions-là***.

Les écoles du dehors, quant à elle espèrent que leurs langages permettent la description de toutes les fonctions calculables ***et tant pis si certaines expressions (du langage) décrivent d'autres bêtes***.

La démonstration du théorème pessimiste et provisoire est une démonstration correcte du théorème suivant :

théorème Toutes les écoles Pythagoriciennes *prétentieuses* sont condamnées à échouer.

Il reste donc un espoir pour les écoles du dehors. En effet, ***si*** les expressions du langage décrivent des fonctions calculables *ainsi que d'autres bêtes* figurées en gras souligné :

$$\{F_1, F_2, \underline{\mathbf{F_3}}, F_5, F_6, \underline{\mathbf{F_7}}, \underline{\mathbf{F_8}}, \underline{F}_9, F_{10}, F_{11}, \ldots\},$$

alors les diagonalisations ne conduisent plus nécessairement à une contradiction. L'application des deux diagonalisations :

$$g(i) = 1 - F_i(i), \text{ (première diagonalisation)}$$
$$g(k) = F_k(k) = 1 - F_k(k), \text{ (deuxième diagonalisation)}$$

montre seulement que F_k est une *autre bête!* ($\underline{\mathbf{F_k}}$), Une bête qui appliquée à k, ne donne pas un nombre.

L'erreur dans la preuve plus haut est de déduire :

On peut donc ranger par ordre lexicographique toutes les définitions de fonctions exprimables dans le langage L. On obtient ainsi une énumération de toutes les fonctions définissables dans L : {F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, ...}

à partir de

il existe une école Pythagoricienne P possédant un langage L tel que toute fonction calculable est définissable dans ce langage.

alors qu'il aurait fallu :

il existe une école Pythagoricienne P possédant un langage L tel que toute fonction calculable est définissable dans ce langage et tel que, inversément, <u>toute expression dans ce langage definit une fonction calculable</u>.

A présent nous pouvons, comme Church, *<u>postuler</u>* l'existence d'une énumération complète P, c'est-à-dire *comprenant* toutes les fonctions intuitivement calculables. P inclut alors nécessairement les *autres bêtes,* qui sont appelées *fonctions (strictement) part*ielles par opposition aux fonctions totales comme on appelle celles qui sont définies sur tous les naturels.

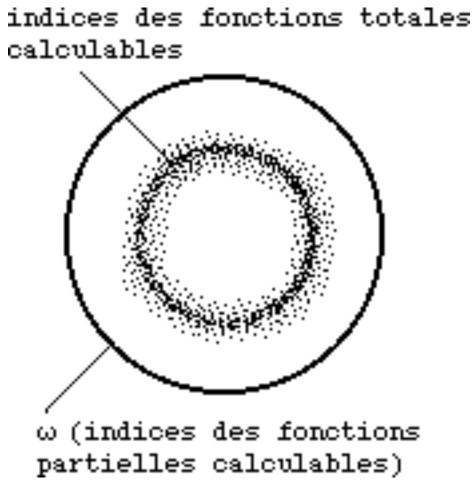
$$P = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots\}$$

Corollaire. Il n'existe pas de fonctions calculables capables de distinguer l'indice d'une fonction partielle de l'indice d'une fonction totale.

En effet si une telle fonction existait, on pourrait l'utiliser pour filtrer mécaniquement P pour générer une énumération prétentieuse :

$$\phi_0\ \cancel{\phi_1}\ \phi_2\ \phi_3\ \cancel{\phi_4}\ \cancel{\phi_5}\ \phi_6\ \cancel{\phi_7}\ \phi_8\ \phi_9\ \phi_{10}\ \cancel{\phi_{11}}\ \cancel{\phi_{12}}\ \cancel{\phi_{13}}\ \phi_{14}\ \cancel{\phi_{15}}\ \ldots \text{ QED.}$$

C'est le contour insaisissable, pour parler comme Lafitte 1932, du total-calculable qui empêche de construire une diagonale capable de réaliser une nouvelle fonction totale calculable, à la différence des hiérarchies Pythagoriciennes.



La thèse de Church implique que ce contour est *nécessairement* insasissable. Cantor a démontré, dans une théorie intuitive des ensembles, l'existence d'ensemble non-énumérables.

En précisant les termes de façon à esquiver les paradoxes, sans toutefois introduire une formalisation, un raisonnement diagonal en tout point similaire à celui de Cantor a mis en évidence l'existence d'un ensemble énumérable mais non *effectivement* énumérable[30].

Avec l'hypothèse mécaniste alliée à l'(hypo)thèse de Church on a isolé ici une première ***loi de l'esprit*** : aucune machine ne peut énumérer les indices des fonctions totales calculables. Myhill 1952 cite E. H. Galanter, du département de ***psychologie*** de l'université de Pennsylvanie, qui parlant des théorèmes d'incomplétude, affirme qu'ils sont :

> *The only known psychological laws comparable in exactitude with the laws of physics* (Galanter, dans Myhill 1952).

---

30 *Remarque* Une thèse plus forte: l'ensemble des processus mécaniquement émulables est inclus dans l'ensemble des processus représentable par des fonctions partielles lambda définissables. Cette thèse est attribuée à Kleene par Webb (voir aussi Davis 1982 page 17, ou Webb 1980 page 218).

L'article de Myhill élabore considérablement, avec la thèse de Church, ce point de vue.

2.1.10 Les fonctions partielles calculables, la thèse de Church

Une fonction est (intuitivement) calculable s'il existe une procédure *communicable* pour la calculer. L'éxécution de la procédure donne lieu à une suite d'appels et d'éxécutions de fonctions primitives (les étapes du calcul par définition). Si on trouve un résultat cela doit être un nombre (vu le codage des choses finies). La seule façon pour une procédure, dynamiquement consistante, de ne pas donner un résultat fini, est de ne rien donner du tout en ne s'arrêtant pas. Il n'y a pas, par exemple, de dernière étape dans le calcul de g(k).

Définition : on appellera *fonction partielle* un fonction définie sur un **sous-ensemble W** de ω et non définie ailleurs. W est appelée domaine de la fonction. Si $W = \omega$, on parlera de fonction *totale*. Si $W \neq \omega$, on dira que la fonction est *strictement partielle*.

On peut alors formuler de façon plus précise la thèse de Church :

Thèse de Church: l'ensemble des fonctions totales calculables est inclus dans l'ensemble des fonctions partielles lambda-définissables.

Voici une énumeration[31] précise de **P** (avec répétition) sous forme de lambda définition[32], interprétable par un LISP[33] décrit en annexe :

---

[31] voir annexe 1

[32] Church 1936 est l'inventeur du calcul λ, (voir aussi Church 1941), McCarthy est l'inventeur de LISP (McCarthy 1960).

[33] **Sémantique de Φ-LISP** Une sémantique "exhaustive" de Φ-LISP est donnée, écrite en COMMON LISP, sous forme d'un *interpréteur méta-circulaire*, dans l'annexe 1 (cf aussi Allen 1978, Abelson & Al 1985). Je propose ici un résumé de l'annexe 1 suffisante pour le propos présent.

Toutes les structures de donnée, y compris les programmes, sont représentés par des listes plutôt que par des nombres naturels.

La valeur d'une expression est relative à un environnement. Celui-ci est lui-même représenté par une liste. Exemple :

```
((a 3) (b a) (c fois-deux) (fois-deux (lambda (x) (+ x x)) )      )
```

Dans cet environnement la valeur de *a* est 3, la valeur de *b* est "a", la valeur de *c* est "fois-deux", la valeur de *fois-deux* est "(lambda (x) (+ x x))".

En gros, à l'exception des expressions lambda et des nombres naturels qui se dénotent eux-mêmes, et à l'exception des mots dont la valeur est donnée dans l'environnement, la valeur d'une expression (A B C ...) est égale à l'application de la valeur de A, val(A) sur la liste des valeurs (val(B), val(C) ...).

L'application de A sur une liste de valeurs (X, Y, Z, ...) se réduit à l'application de la valeur de A sur chacune des valeursX, Y, Z, ... excepté si A est une opération primitive où une expression lambda. Dans ce cas les valeurs sont calculées de façon traditionnelle, par exemple, dans l'environnement décrit plus haut,

ϕ_1 (lambda (x) x)

ϕ_2 (lambda (x) 'equal)

ϕ_3 (lambda (x) 'car)

ϕ_4 (lambda (x) 'cdr)

ϕ_5 (lambda (x) (car x))

ϕ_6 (lambda (x) (cdr x))

ϕ_7 (lambda (x) 'x)

ϕ_8 (lambda (x) (k x))

ϕ_9 (lambda (x) (null x))

ϕ_{10} (lambda (x) 'quote)

ϕ_{11} (lambda (x) 'lambda)

ϕ_{12} (lambda (x) 'k)

ϕ_{13} (lambda (x) 'cons)

ϕ_{14} (lambda (x) 'cond)

ϕ_{15} (lambda (x) 'null)

ϕ_{16} (lambda (x) '(equal))

ϕ_{17} (lambda (x) '(car))

ϕ_{18} (lambda (x) '(cdr))

ϕ_{19} (lambda (x) '(x))

ϕ_{20} (lambda (x) '(quote))

ϕ_{21} (lambda (x) '(lambda))

ϕ_{22} (lambda (x) '(k))

ϕ_{23} (lambda (x) '(cons))

ϕ_{24} (lambda (x) '(cond))

ϕ_{25} (lambda (x) '(null))

ϕ_{26} (lambda (x) (equal x x))

ϕ_{27} (lambda (x) (cons x x))

etc.

Cette version de Lisp possède un petit ensemble d'*atomes* : lambda, car , quote, cons, k, null, cond, sur lesquels existe un ordre arbitraire utilisé pour ranger les programmes en ordre lexicographique (voir annexe). Ces atomes dénotent aussi les fonctions calculables primitives données au départ. **k** désigne ce que j'appelle le *métaprogramme de Kleene*. Il illustre la

---

(c 3) = (fois-deux 3) = ((lambda (x) (+ x x)) 3) = (+ 3 3) = 6

On peut interpréter les ϕ_i comme des fonctions (totales ou partielles) de ω dans ω, calculées par la ième expression lambda de l'énumération présentée. ω peut alors être considéré comme un ensemble d'indices pour les lambda expressions, ou pour des codages, sous forme de listes d'expressions finies constructivité du théorème de Kleene que j'aborde dans la section suivante. J'ai inclus **k** pour des raisons techniques peu importante à ce stade[34].

2.1.11 La machine universelle.

Comme on peut coder les listes <x, y, z,...> avec un nombre naturel, j'écrirai $\phi_i(x, y, z, ...)$ à la place de $\phi_i(<x, y, z,...>)$, cela permet de considérer l'énumération P comme énumérant, d'un coup, les fonctions partielles calculables ayant un nombre finis (mais arbitraire) d'arguments. En particulier $\phi_i(x,y)$ est mis pour $\phi_i(<x,y>)$.

En 1936, Turing, travaillant sur le problème de la décision (Entscheidung) de Hilbert argumente en faveur de la thèse selon laquelle les fonctions *humainement* calculables sont capturées par l'ensemble des fonctions calculables par les machines de Turing[35]. Si *une* fonction est humainement calculable, alors il existe une machine de Turing qui la calcule. Mais il démontre encore (constructivement) l'existence d'une machine particulière M_u, capable de calculer n'importe quelle fonctions qui est calculable par une machine de Turing M_i, pour autant qu'on lui donne la description i de la machine et de son argument. M_u est ce qu'on appelle une machine universelle (de Turing). Turing a démontré que la classe des fonction lambda définissable est identique à la classe des fonctions Turing-calculable, si bien que la thèse de Church est équivalente à la thèse de Turing. Elle se supporte donc mutuellement. En terme d'énumération, si ϕ_i est la fonction calculée par M_i, ce que Turing a démontrer c'est l'existence d'une machine u telle que

$$\phi_u(x,y) = \phi_x(y)$$

Ces machines u calculent exactement ce que les ordinateurs peuvent calculer, si bien que c'est la thèse de Church-*Turing* qui fait de la machine universelle (incarnée notamment par les ordinateurs concrets et singuliers) une machine *vraiment*, ou *absolument*, ou encore *intuitivement* universelle.

On peut montrer que s'il existait une solution générale au problème de la décision (si celui-ci était décidable), il serait possible de construire une énumération prétentieuse[36].

---

[34] L'important est que dans tout système de numérotation acceptable **k** peut être défini. Ce que l'on va démontrer plus loin.

[35] C'est cette analyse de Turing qui va finir par convaincre Gödel qui fit preuve de scepticisme devant la thèse de Church (Davis 1982).

[36] En représentant les machines de Turing en calcul des prédicats, cf Church l'avait fait avec les lambda-définitions. (théorème de Church).

Remarquons qu'aucune énumération stricte (d'une école stricte) n'admet de fonction universelle en son sein, puisque la fonction diagonale $g(x) = u(x,x)+1$ y appartiendrait aussi.

Ainsi s'achève la seconde histoire de l'ordinateur. Mais ce n'est pas la fin de l'histoire de la thèse de Church.

E-STEP

Les procédures digitales sont par nature discrétisables. C'est la signification principale du premier principe de Gandy. L'évaluation d'une forme, c'est-à-dire l'appel d'une fonction partielle calculable sur un argument, donne lieu à une trace que l'on peut considérer comme une succession d'états abstraits identifiables avec le calcul de la forme. La fonction qui associe l'état à l'état suivant est pour une machine quelconque (même universelle) une fonction (prouvablement) totale calculable. Pour Φ-LISP, par exemple, on peut canoniquement associer à l'interpréteur métacirculaire (voir annexe 1) une telle fonction dynamique[37].

Cette dynamique E-step correspond à une évaluation par pas. Voici un exemple d'une itération de E-step, une telle suite est appelée trace :

```
(it-st-val '(+ (+ (+ 5 4) 3) (+ 6 (* 5 3)) (* (+ 6 2) (+ 1 10))))

(+ (+ (VAL 9) 3) (+ 6 (* 5 3)) (* (+ 6 2) (+ 1 10)))
(+ (VAL 12) (+ 6 (* 5 3)) (* (+ 6 2) (+ 1 10)))
(+ (VAL 12) (+ 6 (VAL 15)) (* (+ 6 2) (+ 1 10)))
(+ (VAL 12) (VAL 21) (* (+ 6 2) (+ 1 10)))
(+ (VAL 12) (VAL 21) (* (VAL 8) (+ 1 10)))
(+ (VAL 12) (VAL 21) (* (VAL 8) (VAL 11)))
(+ (VAL 12) (VAL 21) (VAL 88))
(VAL 121)
(VAL 121)q
TERMINE-IT-ST
```

Val sert de marqueur pour dire qu'une expression est jugée définitivement évaluée. L'évaluation se fait en un pas récursivement de gauche à droite.

E-step définit la dynamique des formes, et une machine universelle est essentiellement un dispositif capable d'itérer E-step sur une forme dans un environnement, et d'extraire un résultat, correspondant à l'évaluation de cette forme dans un environnement, au cas ou cette forme est définie dans cet environnement[38].

37 ... qui est universelle au sens de Davis 1956. (voir annexe 1)

38 Voir Davis 1956, Davis 1957 (voir annexe 1).

E-step est utile pour émuler l'éxécution de programmes en parallèle, pour le debugging (recherche d'une erreur ou d'une anomalie dans un programme), pour bâtir une théorie de la complexité, etc. (on y viendra en 2 3).

Pour la même raison qu'il n'existe pas de fonction universelle *dans* une école du dedans, il n'existe pas de fonction trace qui y soit définissable[39].

2.1.12 Arguments en faveur de la thèse de Church.

1) L'immunité contre les arguments diagonaux

Un argument conceptuel important est ce que Kleene a constaté et que l'on a rappelé : il n'y a pas moyen de diagonaliser de façon effective sur l'ensemble des fonctions totales inclus dans l'ensemble des fonction lambda-définissables. C'est cette incapacité qui rend au moins *possible* la thèse de Church. La classe P est fermée pour la diagonalisation. Le principe de Watts Valadier, tel qu'il s'appliquait sur les ordinaux intuitifs ne s'appliquent pas.

C'est la fermeture de la classe des fonctions calculables pour la diagonalisation qui empêche le principe de Lao-Tseu-Watts-Valadier d'invalider la *compréhension* de l'intuitivement calculable, c-à-d d'invalider la thèse de Church.

2) L'échec des réfutations

Une réfutation de la thèse de Church consisterait à produire une fonction intuitivement calculable qui ne soit pas lambda-définissable, pas programmable, pas émulable, ... Toutes les tentatives ont échoué. Une réfutation indirecte, ou un argument contre la plausibilité de la thèse de Church, pourrait consister à montrer qu'une conséquence de la thèse de Church est peu plausible elle-même. On va regarder, après "capacité personnelle" une tentative de ce genre due à Kalmar 1957. En fait Kalmar montre que la thèse de Church permet une formulation beaucoup plus générale du théorème de Gödel :

Th. de Gödel: pour tout système formel SF il existe une proposition p telle que p est vrai et SF ne prouve pas p.

"Th". de Kalmar : il existe une proposition p telle que pour tout système S(F) (éventuellement formel) consistant, p est vrai et S(F) ne prouve pas p.

Autrement dit une conséquence de la thèse de Church est l'existence d'une proposition *absolument* indécidable, qui ne dépend pas du système

---

[39] Cela ne signifie pas qu'il n'existe pas de fonctions universelles, ou de traces pour les fonctions d'une école du dedans {f1,f2,f3, ...}, mais elle ne peut pas être définie par l'école du dedans (elle ne peut donc pas appartenir à l'énumération {f1,f2,f3, ...}).

formelle considéré. Kalmar considère son "théorème" peu plausible, dans la mesure ou nous savons que p doit être vrai et que ceci permet de décider au moins informellement p. Il prétend ainsi avoir rendu la thèse de Church peu plausible[40]. (On va revenir sur ce point).

3) La motivation empirique de base

Toutes les tentatives de capturer les fonctions calculables (incluant les fonctions partielles), a donné le même sous-ensemble de fonctions totales, c-à-d le même sous-ensemble **R** de ω^ω.: $\mathbf{R}_{algol} = \mathbf{R}_{lisp} = \mathbf{R}_{prolog} = \mathbf{R}_{c++} = \mathbf{R}_{jeu\text{-}de\text{-}la\text{-}vie} = \mathbf{R}_{\text{problème à n corps}}$ (Moore 1990).

On a l'équivalence de tous les systèmes formels pour ce qui est des classes de fonctions calculables, classes dont on demande qu'elles soient définissables dans le système et qu'elles soient assez large que pour contenir les fonctions élémentaires.

De telles classe sont fermées pour la diagonalisation.

La motivation empirique de base est surtout la grande variété de tel système ainsi que leur provenance disparate.

En particulier les principes de Gandy pour définir les machines font de celles-ci des entités imitables par les fonctions partielles calculables FPC. Il en est de même pour la machine de Babbage (ce dont Turing se rendra compte, voir Turing "1992").

La classe des FPC est identique avec la classe des fonctions Babbage-calculables, ou des fonctions descriptibles dans son système de notation fonctionnelle. C'est en ce sens que les multiples découvertes de cette classe de fonctions constituent autant de découverte de "l'ordinateur".

Je préciserai cette assertion dans la section suivante ou je définis la notion de machine universelle qui peut être extraite de n'importe quelle énumération des FPC. Cette ubiquité des fonctions partielles calculables constitue la motivation empirique de base pour la thèse de Church: $\mathbf{R}_{\text{votre langage de programmation préféré}}$ inclut le graal, c-à-d l'ensemble de toutes les fonctions totales calculables. On peut le dénoter univoquement par **R** (sans indices).

4) Liste de théorèmes

Le développement même de la théorie de la récursion peut être considéré comme un argument en faveur de la thèse de Church. Quelques théorèmes importants, comme le *théorème de la forme normale* de Kleene 1936, ou les théorèmes d'isomorphismes de Rogers 1958 et de Myhill 1955 sont significatifs à cet égard. Le théorème de la forme normale affirme que chaque fonction partielle calculable ϕ_i, peut être décrite par une forme *normale :*

---

[40] On peut rapprocher le raisonnement de Kalmar 1959 à un raisonnement de Finsler 1926.

$$\phi_i(x) = U(\mu j(T(i, x, j))$$

où T et U sont totales calculables : T = le *prédicat de Kleene.* : T(i, x, j) donne 1 si j est (le code) d'une trace du calcul de $\phi_x(i)$, U extrait le résultat du calcul à partir du code de la trace. μ concentre la part de recherche, il est seul responsable d'une éventuelle partialité de ϕ_i.

5) Théories, ensembles RE et le théorème de Gödel

Les théories dont je parle sont des extensions du calcul des prédicats, intuitioniste ou classique, avec égalité.

On suppose satisfait les axiomes usuels de l'égalité (au moins sur un type nombre naturel dans le cas intuitioniste).

Définition Une théorie T est **assez riche** si les fonctions partielles calculables ϕ_i sont descriptibles dans la théorie au moyen de termes que je désigne par $\underline{\phi}_i$.

Définition Un ensemble E (inclus dans ω) est **décidable** s'il existe une procédure capable de décider pour tout x si x appartient ou non à E.

Définition Un ensemble E (inclus dans ω) est **faiblement décidable** s'il existe une procédure capable de décider pour tout x si x appartient à E. La procédure peut ne pas donner de résultat si x n'appartient pas à E.

Définition Une théorie T est **axiomatisable** s'il existe un sous-ensemble décidable de T dont les conséquences logiques[41] sont les théorèmes de T.

Définition Une théorie T est **complète** si pour toute formule F (dans le langage de T), F appartient à T ou -F appartient à T.

Définition T est **consistante** si ⊥ (ou 0≠0, 1=0, ...) n'appartient pas à T.

Exemple : l'arithmétique de Robinson, de Heyting, de Peano, ZF, etc...

Définition E (inclus dans ω) est **récursif** ssi il existe une fonction totale calculable ϕ_i telle que

---

[41] Moyennant un théorème de complétude, la notion de *conséquence logique* admet la définition sémantique usuelle. En l'absence de tels théorèmes, A est conséquence logique d'un ensemble de formules si A est dérivable au moyen d'un nombre fini d'application de règles d'inférences (définissant syntactiquement la théorie) à partir de ces formules.

$$\phi_i(x) \quad = 1 \text{ si } x \in E, \text{ et}$$
$$\quad = 0 \text{ si } x \notin E.$$

Définition E (inclus dans ω) est **récursivement énumérable** (**RE)** ssi soit E est vide, soit il existe une fonction totale calculable ϕ_i telle que E est l'image de ϕ_i. On dit que ϕ_i génère E. Intuitivement cela signifie qu'il existe une procédure, un algorithme, une machine, qui permet de générer petit à petit, éventuellement avec répétition, l'ensemble E. Les ensembles finis et les ensembles récursifs sont RE.

Variété de thèse de Church TCi

Voilà deux versions théorétiques (en termes d'ensembles de formules, plutôt qu'en terme de fonction) de la thèse de Church :

TC1: **E décidable <=> E récursif**,

TC2: **E faiblement décidable <=> E récursivement énumérable**[42] **(RE)**

Reinhardt appelle TC2 thèse de Post-Turing.

On a : complet et axiomatisable = décidable (et donc récursif)

Remarquons que le prédicat *totale*(i), qui est vrai ssi i est l'index d'une fonction totale dans une énumération des fonctions partielles calculables, est exprimable dans une théorie universelle. Il en est de même pour le prédicat strictement *partielle* :

totale(i) = $\forall x \exists y\ \phi_i(x)=y$, ou $\forall x(x \in W_i)$, ou encore $\forall x \exists y T(i,x,y)$
partielle(i) = $\neg$ *totale*(i)

Moyennant toutes ces définitions, une conséquence (presque) directe du théorème pessimiste-et-provisoire (corrigé) est une version simple (et non constructive) du théorème de Gödel (avec TC1).

théorème (+/- Gödel 1931) Il n'existe pas de théorie axiomatisable, universelle, consistante qui soit complète.

En effet s'il existe une théorie T consistante, complète et axiomatisable et universelle, alors $\forall i$ ($T \vdash$ totale(i) ou $T \vdash \neg$totale(i)), et il est alors facile de

[42] C'est la thèse de Post Turing, selon Reinhardt 1985.

construire en utilisant T une énumération des fonctions totales calculables ce qui donne une énumération prétentieuse.

2.1.13 Ensemble créatif et le théorème de Gödel miniature de Post.

A la différence de la démonstration originale donnée par Gödel 1931 la démonstration présentée plus haut est non constructive. Une démonstration constructive sera donnée plus loin. Néanmoins il existe une version miniature du théorème de Gödel due à Post, qui capture les idées essentielles. Quelques résultats et définitions concernant les ensembles récursivement énumérables (RE) sont nécessaires.

Un théorème élémentaire fondamentale de la théorie de la récursion est qu'un ensemble est RE ssi il est le domaine d'une fonction partielle calculable. Cela permet d'énumérer les indices des ensembles RE de la même façon que les indices des fonctions partielles calculables :

$$W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5\ W_6\ W_7\ \ldots\ W_i\ \ldots$$

Chaque W_i est le domaine de la fonction partielle calculable ϕ_i correspondante (je suis plus précis un peu plus loin). Plus précisément :

Théorème : un ensemble est RE ssi il est le domaine d'une fonction partielle ϕ_i.

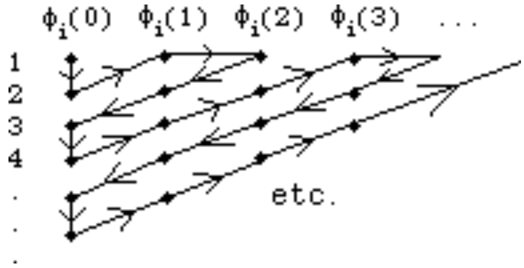
Notons W_i le domaine de définition de ϕ_i.

1°) A est RE -> il existe i tel que A = dom(ϕ_i) = W_i

En effet puisque A est générable, il existe une fonction partielle calculable g (= un certain ϕ_k) telle g(x) = 1 si x appartient à A et qui est indéterminée sinon. (g est la fonction caractéristique de A). A est le domaine de g, A = W_k.

2°) Tous les W_i sont RE, c-àd : il existe i tel que A = dom(ϕ_i) = W_i entraîne que A est RE. C'est-à-dire : on sait énumérer le domaine des ϕ_i.

En effet pour énumérer le domaine d'une fonction ϕ_i il suffit d'utiliser E-step pour effectuer 1 étape du calcul de $\phi_i(0)$, puis encore une étape de $\phi_i(0)$, puis une étape de $\phi_i(1)$, puis une étape de $\phi_i(2)$, puis la deuxième étape de $\phi_i(1)$, puis la troisième étape de $\phi_i(0)$, puis la quatrième étape de $\phi_i(0)$, puis la troisième étape de $\phi_i(1)$, puis la deuxième étape de $\phi_i(2)$, puis la première étape de $\phi_i(3)$, puis la première étape de $\phi_i(4)$, puis la deuxième étape de $\phi_i(3)$, etc. On suit les flèches du tableau suivant où l'ordonnée désigne les étapes et l'abscisse désigne l'application des ϕ_i sur les naturels.



Définition En appliquant une telle procédure je dis qu'on a dovetellé sur $\{x, \phi_i(x)\}$, i étant constant.

A présent il est clair que si $\phi_i(j)$ est définie, alors $\phi_i(j)\Downarrow$ et pour un certain *n* la $n^{ième}$ application de E-step sur $\phi_i(j)$ donnera le résultat et on a prouvé que *j* appartient à W_i.

Théorème (Post 1944) Un ensemble est récursif si et seulement si 1) il est RE, 2) son complémentaire est RE.

preuve presque immédiat.

Théorème de Gödel miniature (Post 1944) Il existe un ensemble RE qui n'est pas récursif.

preuve Soit $K = \{x \mid x \in W_x\} = \{x \mid \phi_x(x)\Downarrow\} = \{x \mid \exists j T(x,x,j)\}$

1) K est RE. Pour s'en convaincre, il suffit de doveteller sur $\{x, \phi_x(x)\}$. Chaque valeur pour laquelle $\phi_x(x)\Downarrow$ sera tôt ou tard trouvée. Plus simplement, on peut se contenter d'énumérer les T(x,x,j).

2) K^c, le complémentaire de K dans ω, n'est pas RE.

$K^c = \{x \mid x \notin W_x\}$, c'est une *première diagonalisation* (revoir le paradoxe de Russell plus haut). Si K^c est RE, il existe un k tel que $K^c = W_k$. La deuxième diagonalisation (correspondant à celle de Russell) revient à poser la question : $k \in W_k$? Si oui, $k \in K^c$, et donc $k \notin W_k$. De même si $k \notin W_k$. alors $k \in K^c$, et $k \in W_k$. Contradiction.

Comme K est RE et comme son complémentaire ne l'est pas, K ne peut pas être récursif.

On reconnaît ici une version algorithmique et non paradoxale, mais très informative du paradoxe de Russell.

Définitions

Post a découvert que K^c n'est pas RE. Il a même constaté que K^c est, d'une certaine façon, *constructivement non RE*. En effet supposons qu'une personne prétend que K^c est *communicablement* RE. Dans ce cas il doit être à même de présenter un indice k tel que $K^c = W_k$. Mais alors la preuve donnée plus haut montre que si $W_k \subset K^c$, alors k, lui-même réfute la communication car dans ce cas $k \in K^c$, et $k \notin W_k$.

D'une façon générale pour tout x ($W_x \subset K^c \Rightarrow x \in K^c \setminus W_k$).

Définition (Post 1944) :

a) un ensemble E est **productif** s'il existe une fonction totale calculable f telle que

$$\forall x(W_x \subset E \Rightarrow f(x) \in E \setminus W_x)$$

b) un ensemble E est **créatif**, s'il est RE et si son complémentaire est productif.

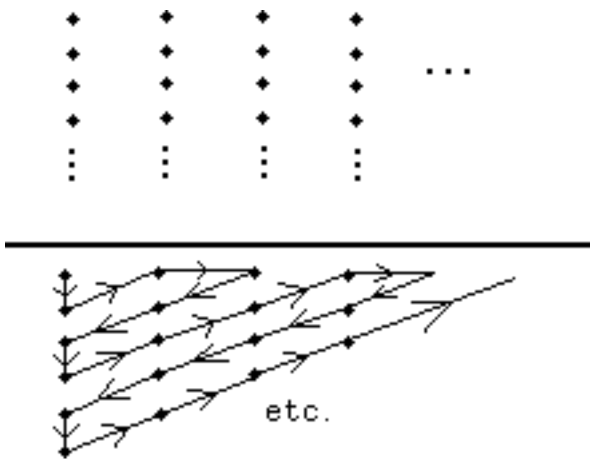
Exemple principal : K est créatif, car son complémentaire est productif avec l'identité jouant le rôle de f.

Remarquons que f joue le rôle du contradicteur dans ce que plus haut j'ai appelé le principe de Lao Tseu-Watts-Valadier *local*.

Rogers 1958 et Myhill 1955, mais aussi Davis 1957 d'une certaine façon, ont montré comment canoniquement associer une machine universelle à un ensemble créatif. Dans un sens c'est facile, si u est une machine universelle, $\{x \mid \phi_u(x,x) \Downarrow\}$ est créatif. Dans l'autre sens, c'est moins évident. Etant donné un ensemble créatif, ou plutôt le code d'un ensemble créatif, comme il est RE, on a une machine qui, à un encodage et un décodage total calculable près, est universelle (au sens de Davis 1956). Je renvoie à Rogers 1958 et Myhill 1955, (voir aussi Cleave 1961 et Rogers 1967) pour plus de renseignements sur les ensemble créatifs et les machines universelles.

Φ-DOVE et le dovetellage

Un petit dessin permet de définir informellement un RE-produit d'ensemble RE, et d'expliquer pourquoi un tel produit est encore RE



Ce résultat permet d'écrire un programme capable d'émuler l'activité de tous les programmes de façon quasi parallèle. J'appelle un tel programme un dovetelleur universel (voir 3.3 et annexe 4).

2.1.14 Gödel et la thèse de Church

Parlant de l'importance du concept de fonctions partielles calculables, Gödel écrit :

> *It seems to me that this importance is largely due to the fact that with this concept one has for the first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion, i. e. one not depending on the formalism chosen. In all other cases treated previously, such as demonstrability or definability, one has been able to define them only relative to a given language, and for each individual language it is clear that the one thus obtained is not the one looked for. For the concept of computability however, although it is merely a special kind of demonstrability or decidability the situation is different. By a kind of miracle it is not necessary to distinguish orders, and the diagonal procedure does not lead outside the defined notion* (Gödel 1946).

C'est curieux car 1) Gödel ne croira pas à la thèse de Church jusqu'à sa lecture de Turing 1936, 2) même après, et malgré qu'il semble y voir une sorte de miracle inespéré, Gödel ne va pratiquement pas tenter d'exploiter ce miracle. L'explication est peut-être liée à son attitude "antimécaniste" On y reviendra (en 2 3).

2.1.15 Thèse de Church intuitioniste et épistémique

Brouwer est l'auteur d'un théorème à proprement parler révolutionnaire, et faux classiquement :

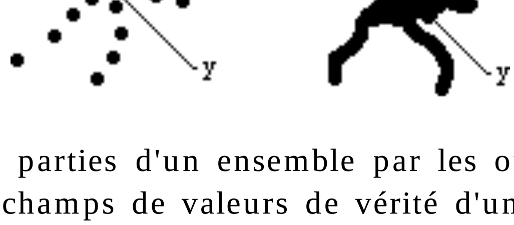
toutes les fonctions de 2^{ω} *dans* 2^{ω} *sont continues*

Cela est révolutionnaire car cela fait du continu, à l'instar de l'expérience subjective, une notion au moins aussi primitive que le discret.

Le principe du tiers exclu, limité à la formule x=y,

$$x=y \lor \neg(x=y)$$

est clairement applicable dans le dessin discret de gauche, mais plus difficilement justifiable dans le dessin continu de droite :



En substituant les parties d'un ensemble par les ouverts d'un espace (topologique) comme champs de valeurs de vérité d'une formule p(x), on interprète aisément le calcul propositionnel intuitioniste. Par exemple la négation de p correspond naturellement au plus grand ouvert disjoint de l'ouvert associé à p, et $\neg\neg p \neq> p$, si p n'est pas fermé.

Une version intuitioniste de la thèse de Church existe. Elle revient à assimiler le continu et le calculable dans l'axiome de Brouwer :

toutes les fonctions de ω dans ω sont calculables (**TCI**)

L'idée est d'escalader les échelles Pythagoriciennes transfinies, en quelque sorte de l'intérieur, en admettant seulement les descriptions de fonctions dont on a préalablement prouvé, de façon non formelle, la totalité.

Pratiquement, c'est ce que l'on obtient en se privant de l'utilisation du principe du tiers-exclu. Dans ce cas un terme d'une théorie intuitioniste peut représenter (une sortie d') une machine totale et une preuve représente la preuve de correction de cette machine vis-à-vis de sa spécification théorique[43].

Quant aux systèmes formels intuitionistes, ils constituent des compromis entre une certaine prétention solipsiste (comme l'axiome de Brouwer) et une certaine ambition communicative.

Toutes les fonctions calculables ne sont pas représentables dans ces systèmes (lorsqu'on les fige *in vitro*), mais étant par nature extensible d'abord, et ne visant par ailleurs rien d'autre que l'extension de soi, ils n'en ont cure. D'autant plus que s'ils sont suffisamment riches[44], on peut (au moins classiquement) démontrer des propriétés de sub-universalité, ou de subcréativité, qui leur confèrent de nombreuses caractéristisques fondamentales des systèmes classiques. En particulier la définition de la capacité personnelle que je vais donner dans la section suivante sera constructive.

Un autre intérêt de la thèse de Church intuitioniste est d'être formalisable dans un système formel intuitioniste. Voici une façon de traduire TCI en logique intuitioniste des prédicats dans une théorie universelle :

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \to \exists z \forall x\, (\phi_z(x)\Downarrow \;\&\; P(x,\phi_z(x))$$

---

[43] Cette ressemblance s'incarne à travers des systèmes (sub-universels) comme les calculs lambda typés (isomorphisme de Curry Howard) où les types correspondent aux formules, et les fonctions aux preuves. Cette isomorphisme en cache d'autres plus profonds, moins fonctionnels, plus intensionnels qui pourraient bien jouer un rôle dans la recherche de la solution du problème du corps et de l'esprit.

Comme je vais me contenter de formuler le problème je pourrai me dispenser d'analyser les systèmes universels ou sub-universels particuliers (comme ceux de Church, Curry, Gentzen, par exemple) en espérant que les contraintes provenant des paradoxes en philosophie mécaniste de l'esprit aide à choisir l'éventuelle formalisation nécessaire (voir 3 3).

[44] Comme l'arithmétique intuitioniste du second ordre, ou le système F de Girard.

Cela permet de montrer la consistance de cette thèse, ou de variations de cette thèse, y compris des variations épistémiques et classiques reposant sur l'interprétation modale S4, due à Gödel (voir 1.1) de la formalisation de Heyting de la logique intuitioniste. Cela est en faveur de l'idée que le sujet, ou son coeur intérieur, est capturé par l'intuition de Brouwer, et qu'une théorie de la connaissance est bien approximée par S4. Voici par exemple une version épistémique TCE, exprimé en logique classique modale S4 :

$$\boxdot \forall x \exists y \boxdot P(x,y) \text{ -> } \exists z \boxdot \forall x\, (\phi_z(x)\Downarrow \;\&\; \boxdot P(x,\phi_z(x)))$$

La thèse de Post-Turing (TC2) devient par exemple

$$\forall n(P(n) \text{ -> } \boxdot P(n) \text{ -> } \exists e \forall n(P(n) \text{ <-> } \phi_e(n)\Downarrow)$$

"$\forall n(P(n)$ -> $\boxdot P(n)$" signifie que P est faiblement décidable, c'est-à-dire que, si p est vrai, je sais le décider. "$\exists e \forall n(P(n)$ <-> $\phi_e(n)\Downarrow)$" signifie qu'il existe un programme, ou une machine, ou un index d'une fonction partielle calculable capable de le décider aussi.

La thèse de Church est un pont entre la philosophie et les mathématiques. Elle repose sur l'intuition prémathématiques des nombres naturels. Mais en philosophie mathématique (et notamment en philosophie mécaniste) des thèses philosophiques peuvent admettre des captures formelles tout comme les physiciens savent depuis longtemps que des thèses physiques (ex: la gravitation universelle, F=Ma, etc.) peuvent admettre des captures formelles. Il ne faut pas confondre les mathématiques avec les choses que l'on peut exprimer mathématiquement.

Cette confusion serait particulièrement malvenue ici dans la mesure où justement le mécanisme force, *au niveau précis* où le fonctionnalisme est correct, l'identification d'un être mathématique (un nombre naturel, sauvable sur une disquette) et d'un être a priori non mathématique (le sujet, moi, vous, avec l'hypothèse indexicale). Ceci est la base qui permettra d'isoler une formulation arithmétique du corps et de l'esprit en 3.3.

La section suivante aborde la définition de l'identité et de la capacité personnelle. Elle permettra d'approfondir la réflexion sur la thèse de Church.

2.1.16 Bibliographie locale

ABELSON H., **SUSSMAN** G. S., **SUSSMAN** J., **1985**, *Structure and Interpretation of Computer Programs*, The MIT Press, Cambridge.

ALLEN J., **1978**, *Anatomy of Lisp*, McGraw-Hill, New York.

BROUWER L. E. J., **1946-1951**, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Edited by D. van Dalen, Cambridge University Press, 1981.

BROUWER L.E.J., **1905**, *Leven, Kunst en Mystiek* (La Vie, l'Art et le Mysticisme), Waltman, Delft. Cité dans van Stigt 1990 page 199.

BROUWER L.E.J., **1948**, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Amsterdam, reprinted in Philosophy of Mathematics, P. Benacerraf & H. Putnam (eds), Cambridge University Press 1983,pp. 90-96, (2ème édition), première édition chez Prentice-Hall 1964.

CANTOR G. **1895**, *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers*, English Translation by P. Jourdain, Dover Publications Inc., 1955.

CARROLL L., "1966", *Logique sans peine*, Hermann, Paris.

CAVAILLÈS, J., "1962", *Philosophie Mathématique*, Hermann, Paris.

CHURCH A.,**1936**, *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, The American Journal of Mathematics, 58, pp. 345-363. Repris dans Davis 1965, pp. 89-107.

CLEAVE J.P., **1961**, *Creative Functions*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 7, pp. 205-212.

DAUBEN J. W., **1979**, *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

DAUBEN, J. W., **1977**, *Georg Cantor and Pope Leo XIII : mathematics, theology, and the infinite*, Journal of the History of Ideas, 38, pp. 85-108.

DAVIS M. (ed.), **1965**, *The Undecidable.* Raven Press, Hewlett, New York.

DAVIS M., **1982**, *Why Gödel Didn't Have Church's Thesis*, Information and Control 54,.pp. 3-24.

DAVIS, M., **1956**, *A note on Universal Turing Machines*, Automata Studies, Annals of mathematics studies, no 34, pp. 167-175, Princeton, N.Y.

DAVIS, M., **1957**, *The definition of Universal Turing Machines*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 8, pp. 1125-1126.

DE LONG H., **1971**, *A Profile of Mathematical Logic*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts.

DEDEKIND R., **1888** *Was sind und was sollen die Zalhen* ?, Braunschweig., Trad. Franç. de J. Milner (avec H. Sinaceur), La bibliothèque d'Ornicar ?, Paris, 1978.

DUMMETT M., **1963**, *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem*, Ratio, vol. 5, pp. 140-155.

DUMMETT M., **1977**, *Elements of Intuitionism*, Oxford Logic Guides: 2, Clarendon Press, Oxford.

EINSTEIN A., **BORN** M., **BORN** H., **1916-1955**, *Correspondance*, traduit de l'allemand par Pierre Leccia, Seuil, Paris.

FINSLER P., **1926**, *Formal Proofs and Undecidability*, in Van Heijenoort 1967, pp. 438-445.

GÖDEL K., **1931**, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatsh., Math. Phys., 38, pp. 173-98, traduit en Français dans Le théorème de Gödel, Seuil, Paris, pp. 105-143, 1989, aussi en Anglais dans Davis 1965.

GÖDEL K., **1946**, *Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics*, in DAVIS 1965, pp. 84-88.

GOLDBLATT R., **1979**, *Topoi the Categorial Analysis of Logic*, revised edition 1984, North-Holland, Amsterdam.

GRZEGORCZYK, A., **1964**, *A Philosophicaly Plausible Formal Interpretation of Intuitionistic Logic*, Indagationes Math. 26, pp. 596-601.

HEYTING A., **1956**, *Intuitionism, an Introduction*, North-Holland, 3ème éd. 1980.

HILBERT D., **1925**, *Über das Unendliche*, Math. Annal., pp. 161-190. Trad. Franç. par Jean Largeault, *Sur l'infini*, dansLargeault J. (Ed.), *Logique mathématique, Texte,* Armand Colin, 1972, pp. 215-245.

HOFSTADTER D., **1979**, *Gödel, Escher, Bach : an Eternal Golden Braid*, Basic Books, Inc., Publishers, New York.

HYMAN A., **1984**, Charles Babbage Pioneer of the Computer, Oxford University Text, Oxford.

KALMAR L., **1959**, *An Argument against the Plausibility of Church's Thesis*, in Constructivity in Mathematics, Proceedings of the Amsterdam Colloquium 1957, A. Heyting (ed), North Holland, pp. 72-80.

KLEENE, S. C., **1936**, *General Recursive Functions of Natural Numbers*, Repris dans Davis 1965, pp. 237-252.

KLEENE S. C., **1952**, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland.

LADRIERE, J., **1957**, *Les limitations internes des formalismes*, E. Nauwelaerts, Louvain, et Gauthier-Villars, Paris.

LAFITTE J., **1932**, *Réflexions sur la science des machines*, Vrin 1972, Paris.

LARGEAULT J., **1993**, *intuition et intuitionisme*, Mathesis, Vrin, Paris.

LARGEAULT J.(textes réunis traduits et présentés par), **1992**, *intuitionisme et théorie de la démonstration*, Mathesis, Vrin, Paris.

LIGONNIÈRE R., **1987**, *Préhistoire et histoire des ordinateurs*, Editions Robert Laffont, Paris.

MARCHAL B., **1988**, *Informatique théorique et philosophie de l'esprit*. Actes du 3ème colloque international de l'ARC, Toulouse, pp. 193-227.

McCULLOCH W. S., **1961**, *What Is a Number, that a Man May Know It, and a Man, That He May Know a Number ?*, The Ninth Alfred Korzybski Memorial Lecture, General Semantics Bulletin, N° 26 & 27, Lakeville, Conn., pp. 7-18. Reprinted in McCulloch W. S., *Embodiments of Mind*, The MIT Press, 1988.

MOORE C. M., **1990**, *Unpredictability and Undecidability in Dynamical Systems*, Physical Review Letters, V. 64, N° 20, pp. 2354-2357.

MYHILL J., **1952**, *Some Philosophical Implications of Mathematical Logic*, The Review of Metaphysics, Vol. VI, N° 2.

MYHILL, J., **1955**, *Creatives sets*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol 1, pp. 97-108.

NETTON I. R., **1982**, *Muslim Neoplatonists*, Islamic Surveys 19, Edinburgh University Press, Edinburgh 1991.

O'MEARA D., **1989**, *Pythagoras Revived Mathematics and Philosophy in Late Antiquity*, Clarendon Paperbacks 1990.

POST E., **1944**, *Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and their Decision Problems*, Bull. Am. Math. Soc. 50, pp. 284-316. also in Davis 1965, pp. 304-337.

REINHARDT W.N., **1985**, *Absolute Version of Incompleteness Theorems*, Noûs, 19, pp. 317-346.

ROGERS H., **1958**, *Gödel Numbering of the Partial Recursive Functions*, Journal of Symbolic Logic, 23, pp. 331-341.

ROGERS H.,**1967**, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, 1967. (2ed, MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1987).

RUCKER R., **1982**, *Infinity and the Mind*, the Harverster press.

SIMMONS G., **1992**, *Calculus Gems*, Mc Graw-Hill, Inc., New York.

SMORYNSKI C., **1985**, *Self-Reference and Modal Logic.*, Springer Verlag.

STEIN D., **1985**, *Ada A Life and a Legacy*, The MIT Press, Cambridge, England.

THUILLIER, P., **1980**, *Le petit savant illustré*, Seuil.

TROELSTRA A. S. and **VAN DALEN** D., **1988**, *Constructivism in Mathematics, An Introduction*, (2 volumes) North Holland.

TROUILLARD J., **1972**, *L'Un et l'âme selon Proclos*, Société d'édition "Les Belles Lettres", Paris.

TURING A., **1936**, *On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc. 42, pp. 230-265. Aussi dans Davis 1965.

TURING, "1992", *Mechanical Intelligence*, Collected Work of A. M. Turing, D. C. Ince (Ed.), North-Holland, Amsterdam.

VAN BENDEGEM J. P., **1987**, *Finite, Empirical Mathematics Outline of a Model*, Rijksuniversiteit te Gent, Gent.

VAN HEIJENOORT J., **1967**, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, England.

VAN STIGT W. P., **1990**, *Brouwer's Intuitionism*, Studies in the history and philosophy of Mathematics, Vol 2, North Holland, Amsterdam.

WEBB J. C., **1980**, *Mechanism, Mentalism and Metamathematics : An essay on Finitism*, D. Reidel, Dordrecht, Holland.

WILKES M.W., **1977**, *Babbage as a Computer Pioneer*, Historia Mathematica, 4, pp. 415-440.